TD 13 – Outils pour les probabilités

Sur la factorielle

Exercice 1 – Calculer les nombres suivants :

$$\text{a) } 5! \qquad \text{b) } \frac{8!}{6!} \qquad \text{c) } \frac{500!}{499!} \qquad \text{d) } \frac{8!}{6!2!}$$

a)
$$\begin{aligned} 5! &= 1\times2\times3\times4\times5 \\ &= 120 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} \frac{8!}{6!} &= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4\times5\times6} \\ &= 7\times8 \\ &= 56 \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} \frac{500!}{499!} &= \frac{1\times2\times...\times499\times500}{1\times2\times...\times499} \\ &= 500 \end{aligned}$$
d)
$$\begin{aligned} \frac{8!}{6!\times2!} &= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times1\times2} \\ &= 7\times4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Exercice 2 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

a) $5\times6\times7\times8\times9$ b) $(n-2)(n-1)n$ c) $2\times4\times6\times\cdots\times(2n)$ d) $1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)$

a)
$$\begin{aligned} 5\times6\times7\times8\times9 &= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}{1\times2\times3\times4} \\ &= \frac{9!}{4!} \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} m(n-1)(n-2) &= \frac{1\times2\times\ldots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n}{1\times2\times\ldots\times(n-3)} \\ &= \frac{n!}{(n-3)!} \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} 2\times4\times6\times\ldots\times(2n) &= 2\times1\times2\times2\times2\times3\times\ldots\times2\times n \\ &= 2^n\times1\times2\times3\times\ldots\times n \\ &= 2^n\times n! \end{aligned}$$
d)
$$\begin{aligned} 1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1) &= \frac{1\times2\times3\times4\times\ldots\times(2n)\times(2n+1)}{2\times4\times\ldots\times(2n)} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n\times n!} \end{aligned}$$

Exercice 3 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Combien y'a-t-il d'applications bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ qui envoie 1 sur 1. Les lister/les représenter.
2. Combien y'a-t-il d'applications injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$? Les lister/les représenter.

3. Combien y'a-t-il d'applications surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$? Les lister/les représenter. *On pourra commencer par compter les applications non surjectives.*

1. Nombre d'applications bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ telles que $1 \to 1$
   $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$
2. Nombre d'applications injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$: 6
3. Nombre d'applications surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:

$$8 - 2 = 6$$

Coefficients binomiaux

Exercice 4 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

a. $\binom{7}{0}$ b. $\binom{8}{8}$ c. $\binom{25}{1}$ d. $\binom{25}{2}$ e. $\binom{25}{23}$ f. $\binom{10}{6}$

a .
$$\begin{aligned}\binom{7}{0} &= \frac{7!}{0! \times (7-0)!}\\ &= \frac{7!}{1 \times 7!}\\ &= 1\end{aligned}$$

b .
$$\begin{aligned}\binom{8}{8} &= \frac{8!}{8!(8-8)!}\\ &= \frac{8!}{8!0!}\\ &= 1\end{aligned}$$

c .
$$\begin{aligned}\binom{25}{1} &= \frac{25!}{1!(25-1)!}\\ &= \frac{25!}{1!24!}\\ &= \frac{1 \times 2 \times 1 \times 24 \times 25}{1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 24}\\ &= 25\end{aligned}$$

d .
$$\begin{aligned}\binom{25}{2} &= \frac{25!}{2!(25-2)!}\\ &= \frac{25!}{2!23!}\\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdot 1 \times 23 \times 24 \times 25}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 23}\\ &= \frac{24 \times 25}{2}\\ &= 12 \times 25\\ &= 300\end{aligned}$$

e .
$$\begin{aligned}\binom{25}{23} &= \binom{25}{25-23}\\ &= \binom{25}{2}\\ &= 300\end{aligned}$$

f .

$$\begin{aligned}\binom{10}{6} &= \frac{10!}{6!4!} \\ &= \frac{1\times 2\times \ldots \times 6\times 7\times 8\times 9\times 10}{1\times 2\times \ldots \times 6\times 1\times 2\times 3\times 4} \\ &= \frac{7\times 8\times 9^3\times 10}{2\times 3\times 4} \\ &= 7\times 3\times 10 \\ &= 210\end{aligned}$$

Exercice 5 – Soit $n \geqslant 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n.

a. $\binom{n}{1}$ b. $\binom{n}{2}$ c. $\binom{n}{3}$

a .

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} \\ &= \frac{1\times 2\times 1\times (n-1)\times n}{1\times 1\times 2\times 1\times (n-1)} \\ &= n\end{aligned}$$

b .

$$\begin{aligned}\binom{m}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ &= \frac{1\times 2\times ...\times (n-2)\times (n-1)\times n}{1\times 2\times 1\times 2\times \cdots (n-2)} \\ &= \frac{(n-1)n}{2}\end{aligned}$$

c .

$$\begin{aligned}\binom{n}{3} &= \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{(n-2)(n-1)n}{6}\end{aligned}$$

Exercice 6 – À l'aide du triangle de Pascal, donner la valeur des coefficients binomiaux

$$\binom{6}{k} \qquad \text{pour tout } k\in\{0,\ldots,6\}$$

$\binom{6}{0}=1$ $\binom{6}{1}=6$ $\binom{6}{2}=15$ $\binom{6}{3}=20$ $\binom{6}{4}=15$ $\binom{6}{5}=6$ $\binom{6}{6}=1$

Exercice 7 – Trouver un moyen efficace pour calculer les nombres suivants.

a. $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}$ b. $\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$

a.
D'après la formule de Pascal.

$$\begin{aligned}\binom{8}{4}+\binom{8}{5} &= \binom{8}{5-1}+\binom{8}{5} \\ &= \binom{9}{5} \\ &= \frac{9!}{5!4!} \\ &= \frac{6\times 7\times 8\times 9}{1\times 2\times 3\times 4} \\ &= 6\times 7\times 3 \\ &= 126\end{aligned}$$

b.
D'après la formule de Pascal,

$$\begin{aligned}\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5} &= \underbrace{\binom{10}{3}+\binom{10}{4}}+\underbrace{\binom{10}{4}+\binom{10}{5}} \\ &= \underbrace{\binom{11}{4}+\binom{11}{5}} \\ &= \binom{12}{5} \\ &= \frac{12!}{5!7!} \\ &= \frac{8\times 9\times 10\times 11\times 42}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} \\ &= 8\times 9\times 11\end{aligned}$$

Exercice 8 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

a. $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ b. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ c. $\dfrac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}$ d. $\dfrac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}$

a. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=2n\times(2n+1)$$

c. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a:

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}} &= \frac{\frac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!}}{\frac{n!}{n!(n-1)!}} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!1!}\times\frac{1!(n-1)!}{n!} \\ &= (n+1)\times\frac{1}{n} \\ &= \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

d. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\leq n$. On a:

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}} &= \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}} \\ &= \frac{n!}{p!(m-p)!}\times\frac{(p-1)!(n-p)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{n}{p}\end{aligned}$$

Exercice 9 – **Lien coefficients binomiaux/factorielles et dénombrement.** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Combien existe-t-il d'anagrammes de "Maison", de "Mississipi" et de "Abracadabra" ?
2. Dans un groupe de n personnes, tout le monde se serre la main. Quel est le nombre de poignées de mains ? *On pourra commencer par comprendre ce qu'il se passe pour* $n=2$, $n=3$, $n=4$,...
3. Quatre athlètes participent à une finale olympique. Combien de classements sont possibles pour cette finale.

1. Total des possibilités
$$6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=6!$$
2. Pour Mississipi (! aux lettres en double)
Total des possibilités
$$\binom{10}{4}\times\binom{6}{4}\times\binom{2}{1}\times\binom{1}{1}=\frac{10!}{4!\times 4!}$$
Pour abracadabra 11 lettres dont 5a, 2b, 2r, 1c et 1d
Au total
$$\binom{11}{5}\times\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{1}\times\binom{1}{1}=\frac{11!}{5!2!2!}$$

Exercice 10 – Lien coefficients binomiaux et dénombrement. On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien de tirages vérifient les conditions suivantes ?

1. Aucune condition supplémentaire.
2. Il y a au moins une carte pique parmi les cinq cartes.
3. Il y a exactement deux valets.
4. Il y a exactement un as et deux carreaux.
5. Les cinq cartes sont de la même couleur.

1. Choix de 2 cartes parmi 52: $\binom{52}{2}$
2. $\binom{13}{1}\times\binom{51}{4}$
choix d'une carte pique parmi les 13 piques puis choix des 4 cartes parmi les 51 restantes
3. $\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}$
choix des 2 valets parmi les 4 puis choix des 3 cartes restantes parmi dans le jeu sans les volets
4. $\binom{3}{1}\binom{13}{2}\binom{36}{2}+\binom{1}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{3}$
choix d'un as qui m'est pas carreau puis choix de 2 cartes carreau, puis choix de 2 cartes restantes dans le jeu sans les as (4 cartes) et sans les carreaux (13 - 1 cartes cor on a déjà enlevé l'as de carreau) auquel on ajoute
choix de l'as de carreau, puis choix d'une carte carreau sauf l'as, puis choix de 3 cartes restantes (pas as ni carreau)
5. $\binom{4}{1}\times\binom{13}{5}$
choix d'une des quatre couleurs puis choix des 5 cartes de la même couleur.

Autour du binôme de Newton

Exercice 11 – Développement. Soient $x,a,b\in\mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes

a. $(a+b)^6$ b. $(2-x)^5$ c. $(2x+1)^4$ d. $(x^2+2)^3$

a.
$(a+b)^6=1\times a^6+6\cdot a^5\cdot b+15\times a^4\times b^2+20\times a^3\times b^3+15\times a^2\times b^4+6\times a\times b^5+1\times b^6$
b.
$$\begin{aligned}(2-x)^5&=1\times 2^5+5\times 2^4\times(-x)+10\times 2^3\times(-x)^2+10\times 2^2\times(-x)^3+5\times 2\times(-x)^4+1\times(-x)^5\\&=32-80x+80x^2-40x^3+10x^4-x^5\end{aligned}$$
c.
$$\begin{aligned}(2x+1)^4&=1\times(2x)^4+4\times(2x)^3\times 1+6\times(2x)^2\times 1^2+4\times(2x)\times 1^3+1\times 1^4\\&=16x^4+32x^3+24x^2+8x+1\end{aligned}$$
d.
$$\begin{aligned}\left(x^2+2\right)^3&=1\times\left(x^2\right)^3+3\times\left(x^2\right)^2\times 2+3\times x^2\times 2^2+1\times 2^3\\&=x^6+6x^4+12x^2+8\end{aligned}$$

Exercice 12 – Calcul de somme.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes

$$1.\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k, \qquad 2.\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \qquad 3.\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

1. En utilisant le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}x^k \\ &= (x+1)^n\end{aligned}$$

2. on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k &= (2+1)^n \\ &= 3^m \\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n\end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (-1+1)^n$$
$$= 0$$

Vers les probabilités finies...

Exercice 13 – Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer le nombre d'issues total et le nombre d'issues correspondant à l'obtention de deux boules de numéro paire dans chacun des deux cas.

1. On tire les deux boules simultanément (tirage sans remise).
2. On tire une boule et on la remet avant de tirer la deuxième boule (tirage avec remise).

1. Nombre total d'issues: 9×8
   nombre d'issues avec deux boules paires: 4×3
2. Nombre total d'issues:
   $$9 \times 9 = 81$$
   Nombre d'issues avec deux boules paires 4×4
3. Nombre total d'issues:
   $$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2}$$
   choix de 2 nombres parmi 9
   Nombre d'issues avec 2 nombres pairs:
   $$\binom{4}{2} = 3+2+1+0$$
   choix de 2 nombres pairs parmi les 4 possibles

Exercice 14 – On lance deux fois un dé à six faces (tirage avec remise). On s'intéresse aux deux valeurs prises par le dé (dans l'ordre des deux lancers).

1. Donner le nombre d'issues total.

2. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 6.
3. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 7.
4. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 6 et en ayant obtenu à 4 au premier lancer.

1. .
   Nombre d'issues totales: 6×6
2. 5 issues
   $1-5$

   $2-4$

   $3-3$

   $4-2$

   $5-1$
3. Nombre d'issues dont la somme vaut 7:

$$6 \times 1$$

4. Nombre d'issues dont la somme vaut 6 avec 4 au premier lancer: 1
   $4-2$

Exercice 15 – À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 9 touches : $1,2,\ldots,9$. Le code d'ouverture de la porte est composé d'un nombre de quatre chiffres. *Un code à quatre chiffres peut être vu comme le choix successifs de quatre nombres compris entre 1 et 9. Avec ce point de vue, on peut représenter la situation grâce à un arbre de probabilité.*

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Le code a été changé et choisi au hasard.
   (a) Combien de codes comportent au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?
   (c) Combien de codes comportent que quatre chiffres différents ?

1. Nombre de codes différents:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9$$

2. Nombre de code avec que des chiffres pairs.

$$4 \times 4 \times 4 \times 4$$

3. SPire code avec que des chiffres $\neq$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6$$