DS 5

Vendredi 9 février, de 13h30 à 17h30

Les candidats sont invités à **encadrer** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de toute matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Est donnée une liste d'**erreurs à ne plus commettre**, et qui seront pénalisées plus lourdement. Prener 10 minutes à la fin du temps imparti pour vérifier que vous ne les avez pas commises.

① *Les erreurs de calcul.* Vérifier, re-vérifier, et re-re-vérifier au besoin !

② *Une récurrence mal rédigée.* On veut voir apparaître trois étapes (initialisation, hérédité et conclusion), on oublie surtout pas de fixer l'entier n au début de l'hérédité, et on indique clairement à quel moment on utilise l'hypothèse de récurrence.

③ *Faire attention à la nature des objets que l'on manipule.* Ainsi, on n'écrira pas «la fonction $f(x)$...» ou «la fonction e^x...» ou «la suite u_n est...» ou autre phrase du même style.

④ *Présenter les variables que l'on manipule.* Si on manipule une expression faisant intervenir un réel x ou un entier naturel n, bien penser à mettre un «Soit $x \in$ ...» ou «Soit $n \in$ ...» avant. De même, si on veut énoncer une propriété faisant intervenir une variable x ou n, on mettra avant «$\forall x \in$ ...»,...

⑤ *Il ne faut pas montrer une égalité par équivalence.* Si on veut montrer qu'une quantité A est égale à une quantité B, on calcule d'une part la quantité A, d'autre part, la quantité B et après on affirme qu'elles sont égales.

⑥ *Encadrer les résultats de chaque question.* Si la réponse porte sur un calcul à effectuer, encadrer la valeur du calcul obtenue, si la réponse porte sur une propriété à démontrer, encadrer celle-ci (même si c'est une phrase).

• Partie 1 - Des questions comme en cours et en TD

Les questions qui suivent sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre souhaité.

1. Montrer que la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$ est ni paire ni impaire,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$
2. Calculer le coefficient binomial suivant
$$\binom{10}{3}.$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression suivante :
$$(x-1)^7.$$
4. Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement.
$$\text{i) } \lim_{x\to+\infty} 2\ln(x+1) - \ln(x+2) \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1} \qquad \text{iii) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$$
5. Une usine fabrique des tubes. Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes. Une étude menée sur la production a permis de constater que les faits suivants.
   - 96% des tubes ont une épaisseur conforme.
   - Parmi les tubes qui ont une épaisseur conforme, 95% ont une longueur conforme.
   - $3,6\%$ des tubes ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

   On choisit un tube au hasard dans la production et on considère les évènements E "l'épaisseur du tube est conforme" et L "la longueur du tube est conforme".
   (a) Calculer $P_{\overline{E}}(L)$.
   (b) En déduire $P(L)$. *On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*

6. Calculer la dérivée des fonctions suivantes en donnant le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction.

   i) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4}$ ii) $g(x) = (\exp(x))^2$ iii) $h(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

7. On considère la fonction f, définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Étudier la parité de la fonction f.
   (c) Déterminer la dérivée de la fonction f.
   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
   (e) La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
   (f) Représenter l'allure de la courbe représentative de f.

8. Étudier la continuité des deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

9. On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{x}.$$

   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2, 3]$.

• Partie 2 - Fonctions & Suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \qquad (\bullet)$$

où f est la fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{3x-1}{x+1}.$$

1. (a) Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (c) En déduire que,
   $$\forall x \geqslant 1, \qquad f(x) \geqslant 1.$$
   (d) Donner le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.
   (e) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. (a) En utilisant la question 1(c), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
   (b) En utilisant la question 1(d), montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
   (d) Grâce à la relation ($\bullet$), déterminer la valeur de ℓ.
3. En langage Python,
   (a) écrire un programme qui définit la fonction f, c'est-à-dire qui prend en argument un réel `x` et qui renvoie la valeur de `f(x)`;
   (b) écrire un programme qui représente la fonction f sur l'intervalle $[1, 10]$;
   (c) écrire un programme qui calcule les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
   (d) écrire un programme qui détermine le rang du premier terme de la suite tel que $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$.

• Partie 3 - Probabilités & Matrices

Une société de location de vélos possède trois magasins, un à Rosnoën, un à Landerneau et un à Miliza. Lorsqu'un(e) client(e) loue un vélo, un jour donné, dans une des trois villes, il/elle le restitue le lendemain dans un des trois magasins, puis un(e) autre client(e) reprend le vélo immédiatement et ainsi de suite. Une étude statistique a permis de montrer que, pour un vélo donné :

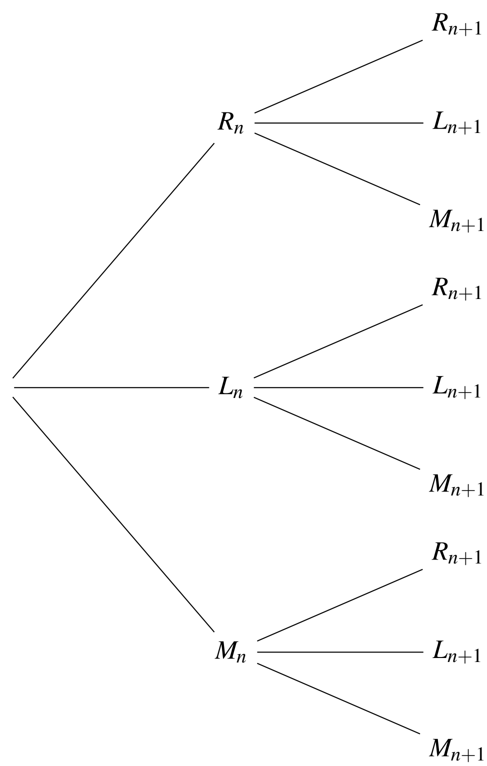
- s'il est loué à Rosnoën un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{3}{4}$,
- s'il est loué à Landerneau un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$,
- s'il est loué à Milizac, il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

R_n : "Le vélo se trouve à Rosnoën le n-ième jour" et $r_n = P(R_n)$
L_n : "Le vélo se trouve à Landerneau le n-ième jour" et $\ell_n = P(L_n)$
M_n : "Le vélo se trouve à Milizac le n-ième jour" et $m_n = P(M_n)$

On suppose qu'au départ, le jour 0, le vélo est à Rosnoën.

1. (a) Donner r_0, ℓ_0 et m_0.
   (b) Tracer l'arbre des probabilités correspondant à ce qu'il se passe le jour 0 et le jour 1.
   (c) Calculer r_1 et ℓ_1 et m_1.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Recopier l'arbre de probabilités ci-dessous et rajouter les probabilités correspondantes sur les différentes branches.



   (b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n.$$

   (c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation analogue entre ℓ_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.
   (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation analogue entre m_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.
3. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation

$$U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$

(a) Donner U_0.
(b) À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$

(c) Démontrer alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$

4. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que pour tout $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
(b) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
(c) Montrer que D est une matrice diagonale.
(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
(e) Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

(f) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

(g) En déduire, à l'aide de la question 3(c), pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de U_n.

5. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n, ℓ_n et m_n en fonction de n.
(b) Vérifier que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n + \ell_n + m_n = 1.$$

(c) Déterminer les limites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. (a) Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour ?
(b) Le fait que le vélo se trouve à Landerneau le premier jour est-il indépendant du fait qu'il se trouve à Milizac le deuxième jour ?

• Partie 4 - Extrait de concours, ECRICOME 2023

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{\exp(\frac{x}{2})}{\sqrt{x}}.$$

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

(b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
(c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0, 1[$ que l'on note u_n, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \ \exists! u_n \in]0, 1[, \ f(u_n) = n. \qquad (\star)$$

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$ que l'on note v_n, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \ \exists! v_n \in]1, +\infty[, \ f(v_n) = n. \qquad (\star\star)$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, comparer $f(v_n)$ et $f(v_{n+1})$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
   (c) Quels sont les deux comportements possibles de convergence pour la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$?
   (d) En utilisant la relation ($\star\star$), montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ ne peut pas converger vers un réel ℓ.
   (e) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.
3. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
   (d) Montrer que $\ell \in [0,1]$.
   (e) En utilisant la relation ($\star$), montrer par l'absurde que $\ell = 0$.
   (f) En utilisant la relation ($\star$), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$$

4. (a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif. On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε. On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.
   - On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
   - Tant que $b - a > \varepsilon$, on repète les opérations suivantes.
     On considère le milieu c du segment $[a,b]$. Par monotonie de f sur $]0,1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a,c]$ ou à l'intervalle $[c,b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
   - On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$ qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

   Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
        a = 0
        b = 1
        while ................ :
                c = (a+b)/2
                if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
                        ................
                else :
                        ................
        return (a+b)/2
```

   (b) Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` (supérieur ou égal à 2) et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme

$$\sum_{n=2}^{N} u_n$$

   à `eps` près. *On pourra faire appel à la fonction `approx_u` définie à la question précédente.*