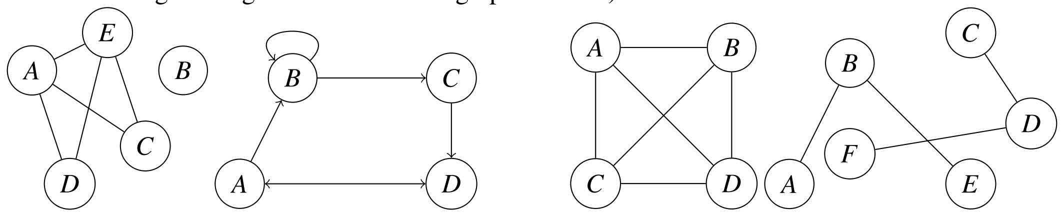
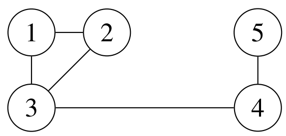
TD 14 – Théorie des graphes

Exercice 1 – Pour chaque graphe, dire s'il est orienté ou non, s'il est complet ou non, donner son ordre et le degré (en détaillant $\deg^+$ et $\deg^-$ dans le cas d'un graphe orienté) de ses sommets.



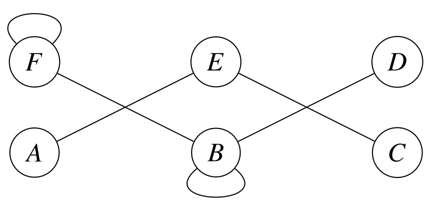
Exercice 2 – En 2019, les 20 professeurs d'une prépa se sont rencontrés pour une réunion. Ils se sont tous serré la main. Combien de poignées de mains ont été serrées ?

Exercice 3 – On considère le graphe non orienté suivant :

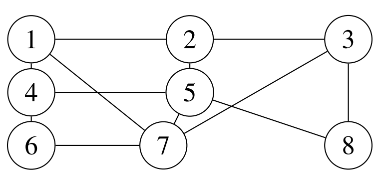


1. Écrire la matrice d'adjacence A de ce graphe.
2. Combien de chaînes de longueur 4 y a-t-il entre les sommets 1 et 4 ? Lister ensuite ces chemins.
3. Démontrer par le calcul que ce graphe est connexe.

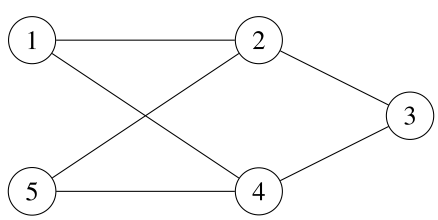
Exercice 4 – Le graphe suivant est-il connexe ?



Exercice 5 – Est-il possible de dessiner ce graphe sans lever le crayon et en passant une, et une seule fois, par chaque trait ?



Exercice 6 – On considère le graphe suivant :

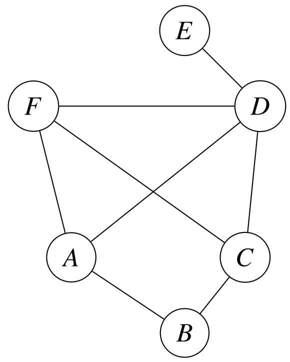


1. Écrire la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Montrer que $M^3 = 6M$.
3. Montrer que pour tout entier naturel k, $M^{2k+1} = 6^k M$.
4. En déduire le nombre de chaînes de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3.

Exercice 7 – Une maison, construite sur un seul niveau, possède 18 ouvertures (portes et fenêtres). Chaque pièce a deux ouvertures sur l'extérieur et deux ouvertures sur l'intérieur. Combien de pièces cette maison possède-t-elle ?

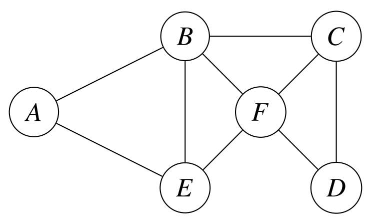
Exercice 8 – Démontrer que dans un groupe de n personnes, il y en a toujours deux qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

Exercice 9 – On considère le graphe suivant :



1. Déterminer le degré de chaque sommet.
2. Former la matrice d'adjacence M du graphe en numérotant les sommets de A à F.
3. Combien y'a t-il de chaînes de longueur 4 joignant E à F ?
4. Ce graphe est-il complet ?
5. Ce graphe est-il connexe ?

Exercice 10 – On considère le graphe suivant :



1. Le graphe est-il connexe ?
2. Montrer qu'il possède au moins une chaîne eulérienne. Donner les deux seules extrémités possibles de cette chaîne.

L'algorithme d'Euler consiste à déterminer dans n'importe quel graphe connexe une chaîne eulérienne. Il s'articule en quatre temps :

- *Créer une chaîne simple entre deux sommets de degrés impairs.*
- *Tant que toutes les arêtes du graphe n'ont pas été utilisées, choisir un sommet quelconque de la chaîne précédente et trouver un cycle associé (partant de ce sommet et arrivant à ce sommet) ne contenant aucune des arêtes déjà utilisées.*
- *Insérer ce cycle en remplacement du sommet choisi à l'étape précédente.*
- *Recommencer ainsi de suite jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes.*

3. Mettre en place l'algorithme d'Euler en partant des chaînes suivantes :
   (a) $E-F-D-C$;
   (b) $E-B-C$.

Exercice 11 – ECRICOME 2023.

Partie 1. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer A^2 et A^3. Vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
   (b) On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n. \end{cases}$$
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non non nul,
   $$A^n = a_n A^2 + b_n A.$$
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
   $$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Partie 2. Soient p un entier naturel non nul et G un graphe non pondéré orienté à p sommets. On note $s_0, s_1, \dots, s_{p-1}$ les sommets de G/

4. (a) Rappeler la définition de la matrice d'adjacence du graphe G.
   (b) Soient n un entier naturel non nul, i un entier de $[\![1, p]\!]$ et j un entier de $[\![1, p]\!]$. Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n où M est la matrice d'adjacence du graphe G.
5. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = 4$ et que la matrice d'adjacence du graphe G est la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   étudiée dans la partie 1.
   (a) Représenter les sommets et les arêtes du graphe G sous forme d'un diagramme.
   (b) Le graphe G est-il connexe ? Justifier votre réponse.
   (c) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0.

Exercice 12 – Programme de 2ième année - Chaîne de Markov. On considère trois points A, B, C du plan. L'objectif de l'exercice est l'étude du mouvement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces points. A l'étape 0, on suppose que le pion est en A. Ensuite, on suppose que le déplacement vérifie les règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "à l'instant n, le pion se situe en A" et l'on définit de même les évènements B_n et C_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note également $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(c_n)$ ainsi que

$$V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

le n-ième état probabiliste de cette chaîne de Markov.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov étudiée. On la notera M.
2. (a) Déterminer a_0, b_0, c_0.
   (b) Déterminer a_1, b_1, c_1.
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (d) De même, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (e) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times M$.
   (f) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times M^n$.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
5. Démontrer par récurrence que que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.
7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n, b_n et c_n.
9. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. On dit que la chaîne de Markov admet un état stable s'il existe

$$U = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

tel que $x+y+z = 1$ et tel que $M^T U^T = U^T$. Déterminer si cette chaîne de Markov admet un état stable et le déterminer le cas échéant.