DS 3

Concours Blanc 1 : Correction

Exercice 1 – 1. Initialisation $a_1 + b_1 + c_1 = \frac{J}{8} + 0 + \frac{J}{8} = \frac{o}{8} = 1$. Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $a_n + b_n + c_n = 1$. A l'aide des relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n + \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n + \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11} \\
&= \left(\frac{2}{11} + \frac{4}{11} + \frac{5}{11}\right)a_n + \left(\frac{3}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11}\right)b_n + \left(\frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{4}{11}\right)c_n \\
&= a_n + b_n + c_n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n + b_n + c_n = 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n = a_n + b_n + c_n = 1$, donc la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est constante égale à 1 .
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= -a_{n+1} + 2b_{n+1} - c_{n+1} \\
&= \frac{-2}{11}a_n + \frac{-3}{11}b_n + \frac{-3}{11}c_n + \frac{8}{11}a_n + \frac{6}{11}b_n + \frac{8}{11}c_n + \frac{-5}{11}a_n + \frac{-5}{11}b_n + \frac{-4}{11} \\
&= \left(\frac{-2}{11} + \frac{8}{11} + \frac{-5}{11}\right)a_n + \left(\frac{-3}{11} + \frac{6}{11} + \frac{-5}{11}\right)b_n + \left(\frac{-3}{11} + \frac{8}{11} + \frac{-4}{11}\right)c_n \\
&= \frac{1}{11}a_n + \frac{2}{11}b_n + \frac{1}{11}c_n \\
&= -\frac{1}{11}(-a_n + 2b_n - c_n) \\
&= -\frac{1}{11}y_n.
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ est bien géométrique de raison $-\frac{1}{11}$.
(b) En tant que suite géométrique de raison $-\frac{1}{11}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = y_1 \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$.
Or $y_1 = -a_1 + 2b_1 - c_1 = \frac{-3}{8} + 0 + \frac{-5}{8} = -1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= -5a_{n+1} - 5b_{n+1} + 7c_{n+1} \\
&= \frac{-10}{11}a_n + \frac{-15}{11}b_n + \frac{-15}{11}c_n + \frac{-20}{11}a_n + \frac{-15}{11}b_n + \frac{-20}{11}c_n + \frac{35}{11}a_n + \frac{35}{11}b_n + \frac{28}{11} \\
&= \left(\frac{-10}{11} + \frac{-20}{11} + \frac{35}{11}\right)a_n + \left(\frac{-15}{11} + \frac{-15}{11} + \frac{35}{11}\right)b_n + \left(\frac{-15}{11} + \frac{-20}{11} + \frac{28}{11}\right)c_n \\
&= \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{-7}{11}c_n \\
&= -\frac{1}{11}(-5a_n - 5b_n + 7c_n) \\
&= -\frac{1}{11}z_n.
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(z_n)_{n \geqslant 1}$ est aussi géométrique de raison $-\frac{1}{11}$.
(b) En tant que suite géométrique de raison $-\frac{1}{11}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n = z_1\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$. Or $z_1 = -5a_1 - 5b_1 + 7c_1 = \frac{-15}{8} + 0 + \frac{35}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{3}(x_n + y_n) = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n - a_n + 2b_n - c_n) = \frac{1}{3} \times 3b_n = b_n$$

et

$$\frac{1}{12}(5x_n + z_n) = \frac{1}{12}(5a_n + 5b_n + 5c_n - 5a_n - 5b_n + 7c_n) = \frac{1}{12} \times 12b_n = c_n$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) \quad$ et $\quad c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$.

(b) D'après la question 2., la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 - b_n - c_n$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \frac{1}{3}(x_n + y_n) - \frac{1}{12}(5x_n + z_n) \\ \text{Alors} \quad &= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right)x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n \\ &= 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n$.

(c) A l'aide des questions précédentes :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n \\ &= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \left(-\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) - \frac{1}{12} \times \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \times \frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \\ b_n &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{5}{12}x_n + \frac{1}{12}z_n \\ \text{et} \quad &= \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Au final, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.$$

6. Comme $-1 < -\frac{1}{11} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{11}\right)^n = 0$, ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$ et $\quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}$.

Exercice 2 – .

1.(a)

$$(M+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I_3).$$

Ainsi $(M+I_3)^2 - 3(M+I_3) = 0_3$, c'est-à-dire $(M+I_3)(M-2I_3) = 0_3$.
Donc $M^2 + 2M + I_3 - 3M - 3I_3 = 0$
On en déduit que $M^2 - M = 2I_3$
Et donc, $M(M-I_3) = 2I_3$
La matrice M est donc inversible et son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{2}(M-I_3)$

(b) On pose $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $PQ = QP = I_3$.

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Après calcul on obtient, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Initialisation. Pour $k = 0, M^0 = I_3 = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$. Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $M^k = PD^kP^{-1}$. Alors, d'après la question précédente, $M = PDP^{-1}$, donc

$$M^{k+1} = MM^k = PDP^{-1} \cdot PD^kP^{-1} = PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}, M^k = PD^kP^{-1}$.
(e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour déterminer a_k et b_k, on peut par exemple calculer les deux premiers coefficients de la première ligne de M^k, et les comparer avec ceux de $a_kM + b_kI_3$. Comme D étant diagonale, $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$. Puis $M^k = PD^kP^{-1} = P\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^k & -2(-1)^k & (-1)^k \\ (-1)^k & (-1)^k & -2(-1)^k \\ 2^k & 2^k & 2^k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & 2^k - (-1)^k & c_k \\ d_k & e_k & f_k \\ g_k & h_k & i_k \end{pmatrix}$, où $c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, h_k, ik$ sont des coefficients qu'on ne cherche pas à calculer. Par ailleurs,

$$a_kM + b_kI_3 = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix},$$

Donc en identifiant les coefficients : $a_k = \frac{2^k-(-1)^k}{3}$ et $b_k = \frac{2(-1)^k+2^k}{3}$.

2. (a) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation. Pour $k = 1, J_n^1 = n^0J_n$.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $J_n^k = n^{k-1}J_n$. Par calcul matriciel on obtient que $J_n^2 = nJ_n$. Alors

$$J_n^{k+1} = J_n^kJ_n = n^{k-1}J_n \cdot J_n = n^{k-1} \cdot nJ_n = n^kJ_n.$$

Finalement, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, J_n^k = n^{k-1}J_n$.

(b) $M_n = J_n - I_n$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $J_n(-I_n) = (-I_n)J_n$, donc par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
M_n^k = (J_n - I_n)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J_n^i \\
&= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}^*, M_n^k = (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n.$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton :

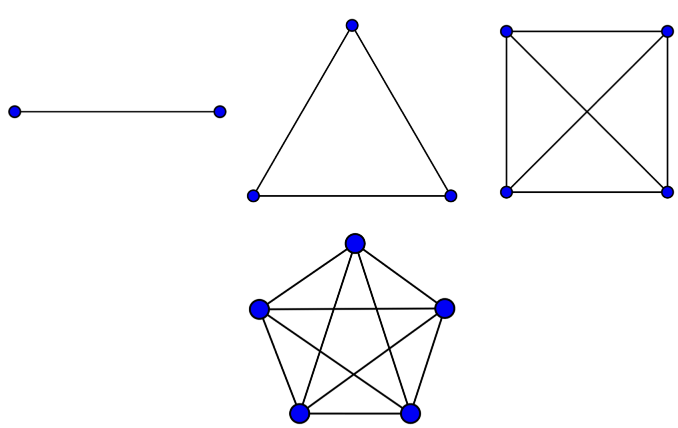
$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} - (-1)^k \right) \\
&= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.
\end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*, M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$.

Donc les coefficients diagonaux de M_n^k sont tous égaux à $c_k + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}$, et les coefficients non diagonaux de M_n^k sont égaux à $c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$.

3.



De gauche à droite, respectivement : représentation des graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.

4. (a) D'après la définition du graphe K_n, la matrice d'adjacence de K_n est la matrice M_n.

(b) Le nombre de chaînes de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même est égal au coefficient situé en première ligne et première colonne de la matrice M_4^4, c'est-à-dire, d'après la question 2.(e), $\frac{3^4+3(-1)^4}{4} = 21$. Il y a donc 21 chaînes de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même .

Exercice 3 – .

1.

$$f(1) = e^{-1} \text{ et } f(-1) = -e^{1}.$$

Par conséquent :

- $f(-1) \neq f(1)$: f n'est pas paire;
- $f(-1) \neq -f(1)$: f n'est pas impaire.

Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

2. $\boxed{\text{En } -\infty :}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ par composée : } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{ainsi: } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$\boxed{\text{En } 0 \text{ , à gauche :}}$ Soit $x < 0$. Posons $X = \frac{-1}{x}$. Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} X = +\infty$. D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} xe^{-1/x} &= \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{-X} \quad \swarrow \text{ par croissance comparée} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} xe^{-1/x} = -\infty$$

$\boxed{\text{En } 0 \text{ , à droite :}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-1}{x} = -\infty, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-1/x} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0^+ \end{array}\right\}$$

ainsi, par opérations : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$

$\boxed{\text{En } +\infty :}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim_{x\to+\infty} e^{-1/x} = 1 \quad \text{ainsi, par opérations : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote "verticale" d'équation $x = 0$, en 0 à gauche.

3. (a) $\boxed{\text{En } +\infty :}$ Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$f(x) - x = xe^{-1/x} - x = x\left(e^{-1/x} - 1\right)$$

Posons X = $\frac{-1}{x}$. Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} X = 0^-$. D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{-1/x}-1\right) = \lim_{\substack{X\to 0\\ X<0}} -\frac{e^X-1}{X} = -1$$

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1$.
$\boxed{\text{En } -\infty :}$ On procède de la même façon, pour obtenir le même résultat. Conclusion : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = -1$.
(b) De la question précédente, on déduit:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1)) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-1)) = 0$$

Conclusion : la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe de f aux voisinages de $\pm\infty$.
4. $f = u\times \exp\circ v$, avec $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \frac{-1}{x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc expov est dérivable sur $\mathbb{R}*$. Ainsi, f, étant un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-1/x} + x\times\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\\ &= e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= e^{-1/x}\frac{x+1}{x}\end{aligned}$$

On obtient ainsi directement :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

5. Soit $x>0$. Posons X = $\frac{1}{x}$. Ainsi $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{X\to+\infty} e^{-X}(1+X)\\ &= \lim_{X\to+\infty}\frac{1+X}{e^X}\\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 0$.
6. (a) On a : $f' : x \longmapsto e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\\ &= e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^3}\end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
variations de f'	$1 \searrow \dots$	$\Vert$	$0 \nearrow 1$

Détaillons les limites apparentes dans ce tableau de variations :

$\boxed{\text{En } -\infty :}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \end{array}\right\}$

ainsi, par opérations : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\boxed{\text{En } -\infty :}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \end{array}\right\}$

ainsi, par opérations : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Ce tableau de variations permet bien d'obtenir le résultat voulu.

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 1$.

(b) Pour cela, posons $g : x \longmapsto f(x) - (x-1)$ et étudions son signe. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*, g$ l'est également et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question précédente, on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) < 0$$

Et comme la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $\pm\infty$, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$
variations de g	$0 \searrow \dots$	$\Vert$	$\dots \searrow 0$

Par conséquent :

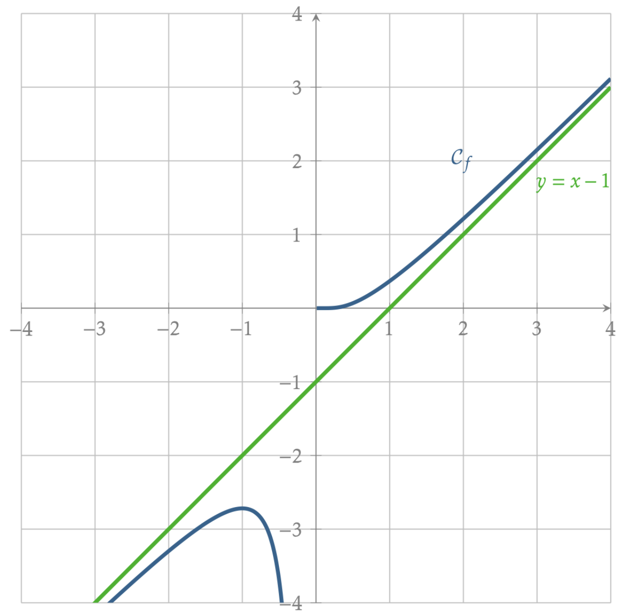
$$\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]0; +\infty[$;

$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]-\infty; 0[$;

$\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x - 1$ n'ont aucun point d'intersection.

7.



8.

```python
import numpy as np

def u(n):
    U=1
    for k in range(1,n+1):
        U=U*np.exp(-1/U)
    return U
```

9.

Par récurrence...

Initialisation. Pour $n = 0$: u_0 existe et $u_0 = 1 \in]0;1]$.

L'initialisation est ainsi vérifiée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons " u_n existe et $u_n \in]0;1]$ " et montrons " u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1$ ".

- Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$; donc $f(u_n)$ existe puisque f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Autrement dit : u_{n+1} existe.
- Également : $u_{n+1} = u_n e^{-1/u_n}$; et comme, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, on a aussi $u_{n+1} > 0$.
- Enfin, par hypothèse de récurrence :

$$0 < u_n \leq 1$$

Puis, par croissance de f est $\mathbb{R}_*^+$, on a :

$$f(u_n) \leq f(1)$$

C'est à dire :

$$u_{n+1} \leq e^{-1}$$

Puisque $e^{-1} \leq 1$, on obtient (par transitivité) :

$$u_{n+1} \leq 1$$

Finalement : " u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$ ". L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in]0;1]$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(e^{-1/u_n} - 1\right)$$

Or, d'après la question précédente $u_n > 0$. On a ainsi :

$$-\frac{1}{u_n} < 0$$

Et par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-1/u_n} < 1$$

Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

11. (a) Pour changer un peu, raisonnons pas équivalence pour transformer le résultat à établir... Soit $x \in]0;1]$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) \leq \frac{1}{e}x &\iff xe^{-1/x} \leq \frac{1}{e}x \\
&\iff e^{-1/x} \leq \frac{1}{e} \quad \text{car } x > 0 \\
&\iff e^{-1/x} \leq e^{-1} \\
&\iff -\frac{1}{x} \leq -1 \qquad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\
&\iff \frac{1}{x} \geq 1
\end{aligned}$$

Or $x \in]0;1]$, donc la dernière inégalité est vraie (décroissance de la fonction inverse sur $]0;1]$); par équivalence,l'inégalité initiale est ainsi également vraie.

Conclusion : $\forall x \in]0;1], f(x) \leq \frac{1}{e}x$.

Remarque: On aurait aussi pu étudier la fonction correspondant à la différence

(b) Par récurrence...

- Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$; par conséquent, $u_0 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.

- Hérédité. Supposons que $u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

D'où, puisque $\frac{1}{e} > 0$:

$$\frac{1}{e}u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

Mais $u_n \in]0;1]$ d'après la question 3 , donc, d'après la question précédente :

$$f(u_n) \leq \frac{1}{e}u_n$$

Par transitivité, on a ainsi :

$$f(u_n) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

L'hérédité est établie.
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
(c) On a:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n \\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = 0, \text{car } \frac{1}{e} \in \left]-1;1\right[\end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{ainsi, par théorème d'encadrement:} \\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array}$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0 .
(d) - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20} &\iff n\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq -20\ln(10) \quad \text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff -n \leq -20\ln(10) \\ &\iff n \geq 20\ln(10) \end{aligned}$$

Conclusion : $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$ lorsque $n \geq 20\ln(10)$.
- Interprétation :
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Ainsi, d'après ce qui précède (et par transitivité) :

$$\forall n \geq 20\ln(10), u_n \leq 10^{-20}$$

Conclusion : on peut affirmer que pour tout $n \geq 45, u_n \leq 10^{-20}$.
(e) On peut déjà dire que le programme s'arrêtera forcément, puisque (u_n) converge vers 0 . Il existe donc un rang à partir duquel u_n est toujours inférieur ou égal à 10^{-20}.
Ici, 4 est d'ailleurs le premier rang à partir duquel c'est vrai.
Comparaison avec la valeur précédente : il est naturel de trouver une valeur inférieure à la question précédente; puisque dans la question précédente, nous avions utilisé une majoration de u_n (établie à la question 5(b)) pour obtenir cette information.
12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}$$

Or $u_{n+1} > 0\ldots$
Conclusion : la suite (S_n) est croissante.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On avait obtenu, à la question 5(b) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k \leq \left(e^{-1}\right)^n$$

D'où, en sommant sur $[\![0;n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-1}\right)^n$$

Or:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-1}\right)^{n} &= \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\\ &= \frac{e-e^{-n}}{e-1}\\ &= \frac{e}{e-1}-\frac{e^{-n}}{e-1}\end{aligned}$$

Or $\frac{e^{-n}}{e-1}>0$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-1}\right)^{n} \leq \frac{e}{e-1}$$

Conclusion : la suite (S_n) est majorée (par $\frac{e}{e-1}$).
(c) Étant croissante et majorée, le théorème de convergence monotone permet d'obtenir que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 4 – 1. Commençons par calculer la matrice

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

On a :

$$M^2=\begin{pmatrix}4&3&3\\6&7&6\\6&6&7\end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^2=\frac{1}{16}M^2=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}4&3&3\\6&7&6\\6&6&7\end{pmatrix}.$$

Cherchons $x,y\in\mathbb{R}$ tels que

$$A^2=xA+yI_3.$$

Or

$$xA+yI_3=\frac{x}{4}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} y=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\\ \frac{x}{4}=\frac{3}{16}\end{cases} \implies x=\frac{3}{4}, y=\frac{1}{4}.$$

Donc

$$A^2=\frac{3}{4}A+\frac{1}{4}I_3.$$

2. On a montré que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3. Supposons que, pour un certain n,

$$A^n = x_n A + y_n I_3.$$

Alors

$$A^{n+1} = A\left(x_n A + y_n I_3\right) = x_n A^2 + y_n A.$$

En utilisant $A^2 = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}I_3$,

$$A^{n+1} = \left(\frac{3}{4}x_n + y_n\right)A + \frac{1}{4}x_n I_3.$$

Donc il existe bien x_{n+1}, y_{n+1}. Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = x_n A + y_n I_3.$$

3. - $A^0 = I_3 \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 1$ - $A^1 = A \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 0$
D'après le calcul précédent :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n \end{cases}$$

On élimine y_n :

$$x_{n+2} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n.$$

4. L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \frac{3}{4}r - \frac{1}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r-1)\left(r + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Donc

$$x_n = a \cdot 1^n + b\left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

Avec $x_0 = 0, x_1 = 1$, on trouve :

$$a = \frac{4}{5}, \quad b = -\frac{4}{5}$$

Ainsi :

$$x_n = \frac{4}{5}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Or $y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$, donc

$$y_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

5. On conclut :

$$A^n = \frac{4}{5}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)I_3 \quad (n \in \mathbb{N})$$