# DS 3 (Concours Blanc 1)

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à **encadrer** dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la **lisibilité** des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

---

**Exercice 1 –** (ECRICOME ECT 2024)

On considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1 = \frac{3}{8}, b_1 = 0$ et $c_1 = \frac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{4}{11}a_n + \dfrac{3}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{5}{11}a_n + \dfrac{5}{11}b_n + \dfrac{4}{11}c_n \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.
   On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}, (y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations : pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$x_n = a_n + b_n + c_n, \quad y_n = -a_n + 2b_n - c_n \quad \text{et} \quad z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n.$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
3. (a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{11}$.
   (b) Donner pour tout entier naturel $n$ non nul, une expression de $y_n$ en fonction de $n$.
4. (a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
   (b) Donner pour tout entier naturel $n$ non nul, l'expression de $z_n$ en fonction de $n$.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n)$.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel $n$ non nul, une expression de $a_n$ en fonction de $x_n$, de $y_n$ et de $z_n$.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'expression de $a_n$, de $b_n$ et de $c_n$ en fonction de $n$.
6. Déterminer les limites de $(a_n)_{n\geqslant 1}$, de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

**Exercice 2 –** (ECRICOME 2024)

**Partie I**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On considère la matrice carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0 , et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.

On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.

1. **Étude du cas $n = 3$.**

   Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)$, puis en déduire que $M$ est inversible et enfin donner l'expression de son inverse en fonction de M et $I_3$.

   Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que $P$ est inversible et que :

   $$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

   (c) Déterminer les coefficients de la matrice $D$.

   (d) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k, M^k = PD^kP^{-1}$.

   (f) Soit $k$ un entier naturel. Montrer qu'il existe deux réels $a_k$ et $b_k$ tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.

   Avec $a_k = \frac{2^k-(-1)^k}{3}$ et $b_k = \frac{2(-1)^k+2^k}{3}$.

2. **Cas général :** $n$ est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2 . On considère la matrice $J_n$ carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

   $$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel $k$ non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.

   (b) Exprimer $M_n$ en fonction de $I_n$ et $J_n$.

   (c) On admet que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a par la formule du binôme de Newton (avec des matrices qui commutent),

   $$(J_n - I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i}$$

En déduire, pour tout entier naturel $k$ non nul :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

(d) Montrer que, pour tout entier naturel $k$ non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},$$

où $c_k$ est le réel défini à la question précédente.
(e) En déduire, pour tout entier naturel $k$ non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de $n$ et de $k$.

**Partie II**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On considère un graphe non orienté $K_n$ à $n$ sommets numérotés de 1 à $n$, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes $K_2, K_3, K_4$ et $K_5$.
4. (a) Déterminer la matrice d'adjacence du graphe $K_n$.
   (b) Dans le graphe $K_4$, combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même? On pourra utiliser le résultat de la question 2e.
5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe $K_n$.
6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe $K_n$ est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

## Exercice 3 – .

On considère la fonction $f : x \longmapsto xe^{-\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

**Partie A: Étude de $f$.**

1. Étudier la parité de $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
3. On donne $\lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x)$
   (b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de $f$ sur $\mathbb{R}^*$.
5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f'(x)$.
6. (a) Établir: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 1$.
   (b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.
7. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.

**Partie B.** Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

8. Écrire une fonction Python, nommée $u$, qui prend en argument d'entrée un entier naturel $n$ et renvoie la valeur de $u_n$ en sortie.
9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in ]0;1]$.
10. Étudier les variations de $(u_n)$.
11. (a). Établir : $\forall x \in ]0;1], f(x) \leq \frac{1}{e}x$.
    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
    (c) Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite $(u_n)$.
    (d) Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu.
    Donnée : $20\ln(10) \simeq 46,05$.
    (e)Le programme suivant (dans lequel u est la fonction Python définie à la question 1 de la partie B) affiche la valeur 4 . Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```
1 n=0
2 while u(n)>10**(-20)
3     n=n+1
4 print (n)
```

12. Considérons la suite $(S_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
    (a) Étudier les variations de $(S_n)$.
    (b) A l'aide du résultat établi à la question 5(b) de la partie B , démontrer que la suite $(S_n)$ est majorée.
    (c) Que peut-on en déduire?

**Exercice 4 –** Considérons $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ puis déterminer les deux réels $x$ et $y$ de sorte que $A^2 = xA + yI_3$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $x_n$ et $y_n$ tels que $A^n = x_n A + y_n I_3$.
3. Donner les valeurs $x_0, y_0, x_1$ et $y_1$ puis établir: $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n$.
4. En déduire les termes généraux des suites ( $x_n$ ) et ( $y_n$ ).
5. Conclure sur l'expression de $A^n$ en fonction de $n$ pour $n \in \mathbb{N}$.