TD 18 – Dérivabilité d'une fonction

Étude locale de la dérivée

Exercice 1 – Les fonctions suivantes sont-elles dérivables au point indiqué ?

i) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ en 0 ii) $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en 1 iii) $h(x) = \sqrt{x+2}$ en -2

Exercice 2 – Calculer les limites suivantes.

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ iii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{12}-1}{h}$ iv) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{12}-1}{e^h-1}$

Étude globale de la dérivée

Exercice 3 – Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f, son domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$ puis calculer l'expression de f'.

i) $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$ iii) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ v) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

ii) $f : x \mapsto \ln(x^2-1)$ iv) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$ vi) $f : x \mapsto 2^x$

Exercice 4 – Déterminer les valeurs a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

1. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
2. Déterminer la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
4. On note $g : J \to [-1,\infty[$ sa bijection réciproque. Montrer que g est dérivable sur J et que,

$$\forall x > -e^{-1},\ x \neq 0, \qquad ,g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}$$

Dérivées successives

Exercice 6 – On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 7 – On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x-1} \times \ln(x).$$

Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

Exercice 8 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

Exercice 9 – Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^p,$$

après avoir justifier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction.

Exercice 10 – Justifier que la fonction suivante est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n-ième :

$$f : x \mapsto (x^2+1)e^{2x}.$$

Théorèmes sur les fonctions dérivables

Exercice 11 – Suites & IAF. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^{-x})$. On considère également la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que l'intervalle $[0,+\infty[$ est stable par f, c'est-à-dire pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \in [0,+\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α.*

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\text{pour tout } x \geqslant 0,\quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$
6. Démontrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$
7. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12 – Suites & IAF, Avec moins d'accompagnement. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1$ tel que
$$\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \alpha.$$
3. Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 13 – Monotonie d'une fonction. On considère la fonction f définie sur son intervalle de définition $\mathscr{D}_f$ par
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
2. En déduire l'allure de la courbe de f.

Exercice 14 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{4}x(x^2-12).$$
Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par
$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x-1}.$$
Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin

Exercice 16 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = -\frac{1}{x},$$
et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in [k-1,k], \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.$$
   (b) En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$.
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1).$$
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 17 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note toujours f ce prolongement.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que,
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$
5. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.