Interrogation du 5/1/2026

1. Soient $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ des éléments de $\mathbb{R}$ quelconques.
   Supposons que $f(u)=f(v)$.
   Montrons que $u=v$.
   Comme $f(u)=f(v)$, on a $(x+y,x-3y,x+2y)=(x'+y',x'-3y',x'+2y')$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x+y=x'+y' \\ x-3y=x'-3y' \\ x+2y=x'+2y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x'+y' \\ -4y=-4y' \\ y=y' \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases} \Leftrightarrow u=v$$

   Donc $u=v$.
   Ainsi, l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ est injective.
2. .
   Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$quelconque.
   Montrons qu'il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=f(x)$.
   On cherche $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=x^2$. Comme y est positif, cette équation admet deux solutions données par $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.
   Donc, par exemple, $y=f(\sqrt{y})$ avec $\sqrt{y}\in\mathbb{R}$.
   Donc l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$est surjective.
3. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
   $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$