Chapitre 15 : Probabilités sur un univers fini

1 Expériences aléatoires – Événements

1.1 Définition

Définition 1.1 — Expérience aléatoire – Univers. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Elle comporte plusieurs résultats possibles, appelés **issues**.
2. On ne peut pas prévoir l'issue avant d'avoir réalisé l'expérience.

L'ensemble des issues de l'expérience est appelé **l'univers**, il est noté généralement Ω.

Exemple 1.2

Expérience	Résultats possibles	Univers
On lance un dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.	$1,2,3,4,5,6$	$\Omega = [\![1,6]\!]$
On lance une fois pile équilibrée qui donne Pile ou Face.	Pile, Face	$\Omega = \{P,F\}$
On lance deux dés discernables, et on regarde le numéro de chaque dé, que l'on note sous la forme d'un couple.	$(1,1),(1,2),\dots$	$\Omega = [\![1,6]\!]^2$
On lance deux dés discernables, et on s'intéresse à la valeur de la somme des deux dés.	$2,3,....,12\dots$	$\Omega = [\![2,12]\!]$
On considère une urne contenant 1 boule blanche et 3 boules bleues. On tire au hasard deux boules successivement dans l'urne avec remise. On s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.	$0,1,2$	$\Omega = \{0,1,2\}$
On considère une urne contenant 1 boule blanche et 3 boucles bleues. On tire au hasard deux boules successivement dans l'urne sans remise. On s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.	$0,1$	$\Omega = \{0,1\}$

Dans la suite de ce chapitre, Ω désignera l'univers d'une expérience aléatoire.
De plus, on supposera Ω **fini** et non vide. Il sera donc de la forme $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}$.

Définition 1.3 — Évènement. Un **évènement** est une partie de l'univers, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble Ω. L'ensemble des évènements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$. On peut distinguer certains évènements en particulier.

- Ω est **l'événement certain**.
- $\varnothing$ est **l'événement impossible**.
- Tout événement de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est une des issues de l'expérience, est appelé **événement élémentaire**.

Exemple 1.4 On lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. On rappelle que $\Omega = [\![1,6]\!]$.

Evènement	Ensemble	Type d'évènement
« on obtient 5 »	$\{5\}$	Évènement élémentaire
« on obtient 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 »	$\{1,2,3,4,5,6\}$	Évènement certain
« on obtient 7 »	$\varnothing$	Évènement impossible
« on obtient un nombre pair »	$\{2,4,6\}$	Évènement

1.2 Opérations sur les événements

Définition 1.5 Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω.

- ▷ L'événement « A **ou** B » est l'évènement qui a lieu lorsqu'au moins un des deux évènements A et B a lieu. Il s'agit de l'ensemble $A \cup B$.
- ▷ L'événement « A **et** B » est l'évènement qui a lieu lorsque les deux évènements A et B sont réalisés. Il s'agit de l'ensemble $A \cap B$.
- ▷ L'événement **contraire de** A est l'évènement qui a lieu exactement lorsque l'évènement A n'a pas lieu. Il s'agit de l'ensemble $\bar{A}$.

On retrouve les propriétés vues sur les ensembles, dont on rappelle les principales.

Proposition 1.6 Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A, B, C trois évènements.

- On a $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (commutativité).
- On a $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité).
- On a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité).
- On a $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- On a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (loi de Morgan).

Les notions d'intersection et d'union peuvent se généraliser à un nombre fini quelconque d'ensembles comme expliqué ci-dessous.

Définition 1.7 Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ une famille d'événements d'une expérience aléatoire. Alors

- ◦ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$ est l'événement « Au moins un des A_k, pour $1 \leqslant k \leqslant r$, est réalisé »
- ◦ $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r$ est l'événement « Tous les A_k, pour $1 \leqslant k \leqslant r$, sont réalisés »

Exemple 1.8 On lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. On rappelle que $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

Évènement	Opération	Ensemble
A « on obtient un nombre impair »		$\{1, 3, 5\}$
B « on obtient 2 »		$\{2\}$
$A \cup B$	Union – « Ou »	$\{1, 2, 3, 5\}$
$A \cap B$	Intersection – « Et »	$\varnothing$
$\overline{A}$	Contraire – « Non »	$\{2, 4, 6\}$

Exemple 1.9 On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges. On note, pour tout $k \in \{1, 2\}$, R_k l'évènement «Obtenir une boule rouge au k-ième lancer». Décrire les évènements suivants en fonction de R_1 et R_2.

- L'évènement A «La deuxième boule tirée est rouge»

$$A = R_2$$

- L'évènement B «La première boule tirée est blanche»

$$B = \overline{R_1}$$

- L'évènement C On tire deux boules rouges»

$$C = R_1 \cap R_2$$

- L'évènement D «On tire au moins une boule blanche»

$$D = \overline{R_1 \cap R_2} = \overline{R_1} \cup \overline{R_2} \qquad (\text{ou} \qquad D = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2))$$

Exemple 1.10 On lance dix fois unepièce équilibré. On note pour tout $k \in \{1, \ldots, 10\}$, P_k l'évènement «Obtenir Pile au k-ième lancer». Décrire les évènements suivants en fonction des $(P_k)_{k=1,\ldots,10}$.

- L'évènement A_1 «On obtient Face au premier tirage»

$$A_1 = \overline{P_1}$$

- L'évènement A_2 «On obtient que des Pile»

$$A_2 = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{10}$$

- L'évènement A_3 «On obtient au moins une fois Face»

$$A_3 = \overline{P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_{10}} = \overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \cdots \overline{P_{10}}$$

- L'évènement A_4 «On obtient Pile pour la première fois au troisième lancer»

$$A_4 = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3$$

- L'évènement A_5 «On obtient Pile pour la première fois au troisième lancer et Face pour la première fois au quatrième lancer»

$$A_5 = \varnothing$$

Exemple 1.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, B_k l'évènement «Obtenir une boule blanche au k-ième tirage». Décrire l'évènement A «Obtenir n boules noires» en fonction des $(B_k)_{k=1,\ldots,n}$.

On a,

$$A = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_n}$$

Définition 1.12 Deux événements A et B sont dits incompatible si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 1.13 Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire deux boules successivement avec remise. Les évènements suivants sont-ils incompatibles ? On notera pour tout $k \in \{1,2,3\}$, N_k l'évènement «Obtenir une boule noire numérotée k» et pour tout $k \in \{1,2\}$, B_k l'évènement «Obtenir une boule blanche numérotée k».

Evénement	Incompatibles ?	$\cap$?
A « On tire une boule blanche » et B « On tire une boule noire »	Non	$(B_1 \cap N_1) \cup (B_1 \cap N_2) \cup \cdots$
A « On tire une boule blanche » et B « On tire une boule avec un numéro 3 »	Non	$(B_1 \cap N_3) \cup \cdots$
A « On tire un numéro 2 » et B « On tire un numéro 3 »	Non	$(N_2 \cap N_3) \cup (B_2 \cap N_3)$
A « On tire une boule noire » et B « On tire une boule avec un numéro 3 »	Non	N_3

1.3 Système complet d'événements

Définition 1.14 — **Système complet.** On appelle **système complet d'évènements** (ou **partition** de l'univers) un ensemble d'évènements qui sont deux à deux disjoints et dont la réunion forme l'univers. Autrement dit, si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements, alors $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un **système complet d'événements** lorsque :

1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \varnothing$,
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

? Un système complet d'évènements est donc une façon de ranger/découper tout l'univers, sans faire de double compte.

Exemple 1.15 On lance (encore) un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les familles suivantes forment-elles un système complet d'évènements ?

1. La famille $(A_1, A_2, \dots, A_6)$ où, pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, A_i « On obtient le numéro i » ? OUI
2. La famille (A, B) où A « On obtient un nombre pair » et B « On obtient un nombre impair » ? OUI
3. La famille (A, A_1, A_3, A_5) ? OUI
4. La famille (A, A_1, A_3) ? NON (la réunion ne forme pas l'univers)
5. La famille (B, A_1, A_2, A_4, A_6) ? NON (les évènements ne sont pas deux à deux disjoints)

Exemple 1.16 Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire une boule au hasard. Les familles suivantes forment-elles un sytème complet d'évènements ?

1. La famille (A_1, A_2, A_3) où, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, A_i « On obtient une boule numérotée i » ? OUI
2. La famille (N, B) où N « On obtient une boule noire » et B « On obtient une boule blanche » ? OUI
3. La famille (C, D) où C « On obtient la boule noire numéro 1 » et D « On n'obtient pas la boule noire numéro 1 » ? OUI

Proposition 1.17 Soit A un événement. Alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

1.4 Résumé sur le vocabulaire

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités	Exemple avec le dé
L'ensemble	L'univers	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Un élément	Une issue	1, 2, 3, 4, 5, 6
Un singleton	Un évènement élémentaire	$\{3\}$ // « On obtient 3 »
Une partie	Un évènement	$\{1,3,5\}$ // « On obtient un nombre impair »
L'ensemble vide	L'évènement impossible	$\varnothing$ // « On obtient le nombre 7 »

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
Le complémentaire	L'évènement contraire
$A \cap B$	« A et B »
$A \cup B$	« A ou B »
$A \cap B = \varnothing$	« A et B incompatibles »

2 Probabilité sur un ensemble fini

2.1 Notion de probabilité – Espace probabilisé fini

On rappelle que Ω est un ensemble **fini** et non vide. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω.

Définition 2.1 On appelle **probabilité sur** Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

1. Pour tout évènement A, $P(A) \in [0,1]$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pour tout événement A, le réel $P(A)$ est appelé **probabilité de** A. Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est alors appelé **espace probabilisé fini.** Pour la suite du chapitre, on suppose qu'une probabilité P est donnée sur Ω.

! Attention, le «probabilité» est souvent utilisé de deux manières différentes qu'il convient de bien distinguer.

- La probabilité de A est le **réel** $P(A)$ (compris entre 0 et 1) qu'on associe à l'évènement A pour mesurer sa vraisemblance.

- La probabilité P est l'**application** qu'on choisit pour mesurer la vraisemblance de tous les évènements de Ω.

La propriété 3. de la définition précédente peut se généraliser à un nombre quelconque fini d'ensembles incompatibles.

Proposition 2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour toute famille finie $(A_1, \cdots, A_n)$ d'événements **deux à deux incompatibles** c'est-à-dire que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$), on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Proposition 2.3 Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements.

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Exemple 2.4 On lance une fois un dé (truqué) à six faces. Supposons que cette expérience aléatoire soit munie de la probabilité suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(\{k\}) = P(D_k)$	0.2	0.05	0.3	0.05	0.3	0.1

On a noté, pour tout $k \in \{1, \ldots, 6\}$, D_k l'évènement «Obtenir le numéro k». Quelle est la probabilité de l'évènement A «Obtenir un nombre pair» ? Quelle est la probabilité de l'évènement B «Obtenir un nombre impair»

- *Étape 1. Décomposer l'évènement qui nous intéresse en évènements "plus petits" dont on connait la probabilité.* On a,

$$A = D_2 \cup D_4 \cup D_6 \qquad \text{et} \qquad B = \overline{A}$$

- *Étape 2. Identifier l'opération effectuée et utiliser la formule correspondante.* Les évènements D_2, D_4, D_6 sont deux à deux **incompatibles**, donc on obtient,

$$P(A) = P(D_2) + P(D_4) + P(D_6) = 0.2$$

  Puis, en passant au **complémentaire**, on obtient,

$$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.8.$$

Proposition 2.5 — **Formule du crible ou Formule de Poincaré.** Pour tous évènements A et B, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 2.6 Dans une entreprise, 38% des employés parlent anglais, 12% parlent espagnol et 5% parlent anglais et espagnol. Quel est le pourcentage des employés qui ne parlent aucune de ces deux langues.

Soit A l'évènement «L'employé sait parler anglais» et E l'évènement «L'employé sait parler espagnol».

-
- *Étape 0. Identifier ce que l'on cherche.* On cherche à calculer $P(\overline{A} \cap \overline{E})$.

- *Étape 1. Décomposer l'évènement qui nous intéresse en évènements "plus petits" dont on connait la probabilité.* On cherche

$$\overline{A} \cap \overline{E} = \overline{A \cup E}$$

- *Étape 2. Identifier l'opération effectuée et utiliser la formule correspondante.* Les évènements A et E ne sont pas incompatibles. On utilise donc la **formule de Poincaré** pour calculer $A \cup E$:

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{38}{100} + \frac{12}{100} - \frac{5}{100} = \frac{9}{20}$$

Puis, en passant au **complémentaire**, on obtient,

$$P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 1 - P(A \cup E) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

Proposition 2.7 Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1.$$

Exemple 2.8 Soit P une probabilité sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Supposons que :

ω	1	2	3	4
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	

Calculer $P(\{4\})$.

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = 1 \text{ donc } P(\{4\}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Exemple 2.9 On lance un dé à six faces. On suppose que la face 1 tombe avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et que les autres faces tombent toutes avec la même probabilité p. Que vaut p ?

On sait que

$$\begin{aligned}
1 &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&= \frac{1}{4} + p + p + p + p + p \\
&= \frac{1}{4} + 5p
\end{aligned}$$

En résolvant l'équation, on obtient

$$p = \frac{3}{20}$$

2.2 Exemple fondamental : la probabilité uniforme

On cherche à construire une probabilité pertinente dans le cas d'une situation d'*équiprobabilité*, c'est-à-dire lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. On rencontre ce genre de situation lors de lancers d'une pièce ou d'un dé (non truqués), de tirages d'une carte dans un jeu,...

Proposition 2.10 — Probabilité uniforme. L'application

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant l'évènement A}}{\text{nombre total d'issues}}. \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelée **probabilité uniforme sur** Ω.

Exemple 2.11 On lance un dé à 6 faces équilibré, et on regarde la valeur obtenue sur la face supérieure. L'univers des possibles associé à cette expérience est $\Omega = [\![1,6]\!]$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

Évènement	Ensemble	Probabilité
« On obtient 1 »	$\{1\}$	$P(\{1\}) = \frac{1}{6}$
« On obtient 7 »	$\varnothing$	$P(\varnothing) = 0$
« On obtient 3 »	$\{3\}$	$P(\{3\}) = \frac{1}{6}$
« On obtient un nombre pair »	$\{2,4,6\}$	$P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
« On obtient un nombre impair plus petit que 4 »	$\{1,3\}$	$P(\{1,3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Exemple 2.12 On tire au hasard un ensemble de 5 cartes (tirage sans ordre) dans un jeu de 32 cartes (quatre couleurs ; pour chaque couleur, les cartes vont du 7 au roi avec l'as) . On munit cette expérience de la probabilité uniforme. Déterminer la probabilité de l'évènement suivant

B : « la main contient au moins un As ».

L'univers est ici,

$$\Omega = \{(7\clubsuit, 8\clubsuit, \mathrm{As}\clubsuit, 7\heartsuit, 10\diamondsuit), \ldots\}.$$

Il est trop compliqué à décrire... Mais on sait au moins que

$$\mathrm{card}(\Omega) = \binom{32}{5}.$$

On munit cet espace de la probabilité uniforme car les tirages sont **équiprobables**.

Gestes Invisibles/Automatismes.

- Pour un tirage sans ordre, il est difficile de représenter un arbre de probabilité (car un arbre indique toujours une temporalité/un ordre). Il faut donc essayer de s'en passer.
- On cherche à calculer la probabilité d'un évènement qui contient «au moins». Il est plus facile de passer par l'évènement **contraire**.

On commence par calculer la probabilité de l'évènement **contraire** :

$\bar{B}$: « la main de contient aucun as ».

En effet, comme la probabilité est **uniforme**, on a,

$$P(\bar{B}) = \frac{\mathrm{card}(\bar{B})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

Puis, en passant à l'évènement **contraire**, on obtient,

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

Exemple 2.13 On réalise trois tirages successifs (avec ordre) et avec remise dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules jaunes. On munit cette expérience de la probabilité uniforme. Déterminer la probabilités de l'évènement suivant

A : « Tirer une boule rouge puis une jaune puis une jaune (dans cet ordre) »

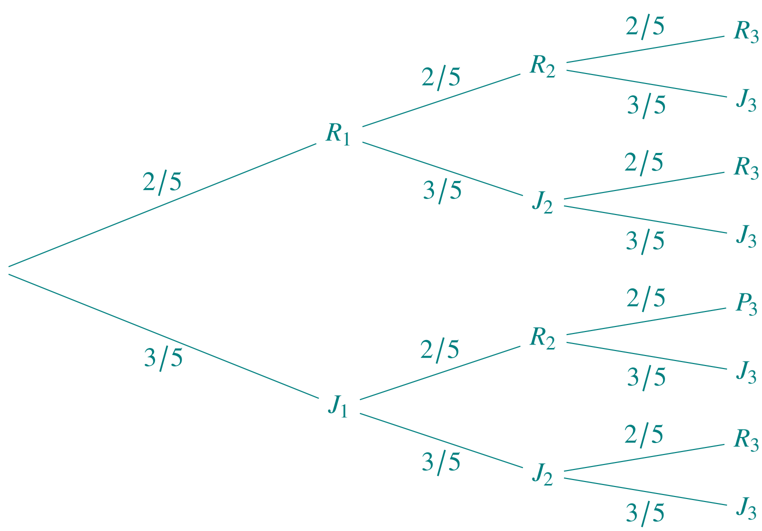
- *Première méthode (vision probabilité uniforme).* Ici l'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.Il y a ici **équiprobabilité** donc on le munit de la probabilité uniforme. Plutôt que de décrire Ω, on calcule son cardinal :

$$\mathrm{card}(\Omega) = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000.$$

Finalement, on obtient que

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{4 \times 6 \times 6}{10 \times 10 \times 10} = \frac{18}{125}$$

- *Deuxième méthode (vision arbre de probabilité).* La situation peut se résumer via l'arbre de probabilité suivant.



Les probabilités rajoutées sur l'arbre correspondent à un tirage **uniforme**. Avec ces notations, on cherche la probabilité $P(R_1 \cap J_2 \cap J_3)$. Comme les tirages sont **indépendants** (car avec remise), on obtient,

$$P(R_1 \cap J_2 \cap J_3) = P(R_1) \times P(J_2) \times P(J_3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$$

2.3 Probabilités conditionnelles

Proposition 2.14 Soit A un événement non négligeable. L'application

$$\begin{array}{rccl} P_A : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & B & \longmapsto & P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array}$$

est une probabilité sur Ω. Pour tout évènement B, le réel $P_A(B)$ est appelé **probabilité (conditionnelle) de B sachant A**.

Exemple 2.15 On lance deux dés (numérotés de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit 6, sachant que le premier dé a donné un chiffre pair ? On munit cette expérience de la probabilité uniforme.

Gestes Invisibles/Automatismes. On cherche à calculer la probabilité d'un évènement qui contient «sachant que». Cela signifie qu'on cherche à calculer une probabilité conditionnelle.

Pour formaliser la situation, un résultat d'un lancer de dé est représenté par un couple (a,b) où a est le résultat du premier dé et b celui du deuxième. Ainsi,

$$\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] = [\![1,6]\!]^2.$$

et en particulier,

$$\mathrm{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36.$$

On découpe ce que l'on cherche en deux évènements

B : « La somme des chiffres obtenue est 6 »

A : « Le premier dé donne un chiffre pair »

Avec ces notations, on cherche à déterminer

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Comme la probabilité est **uniforme**, on a,

$$P(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(A \cap B) = P(\{(2,4),(4,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Finalement,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{9}.$$

2.4 Formule des probabilités composées

La formule des **probabilités composées** permet de calculer la probabilité d'une **intersection** lorsque les évènements en jeu ne sont **pas indépendants** (cf Section 3).

Proposition 2.16 — **Formule des probabilités composées.**

1. Si A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

2. Si A et B sont trois évènements, avec $P(A \cap B) \neq 0$, alors

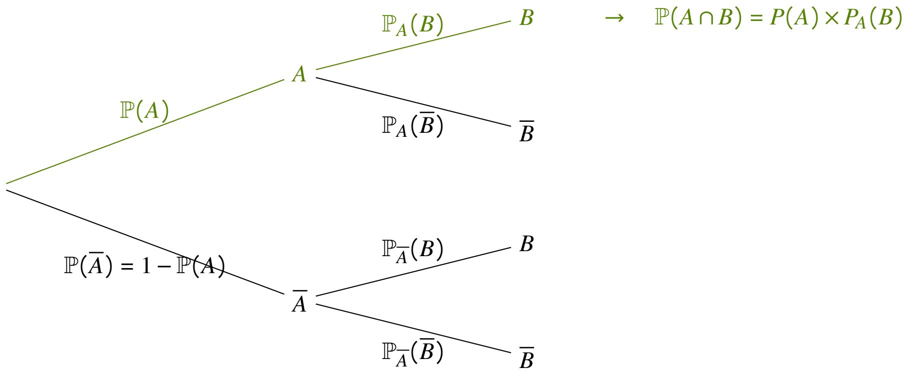
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$$

3. De manière générale, soient $A_1, \ldots A_p$ des évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}) \neq 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_1)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p).$$

Autrement dit, sur un arbre de probabilité, la probabilité qu'un chemin se réalise est le produit des probabilités de toutes les branches qui le composent.

Sur un arbre des probabilités, il faut bien faire attention à distinguer la probabilité de l'intersection de A et B, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et de la probabilité de B sachant A, $\mathbb{P}_A(B)$.

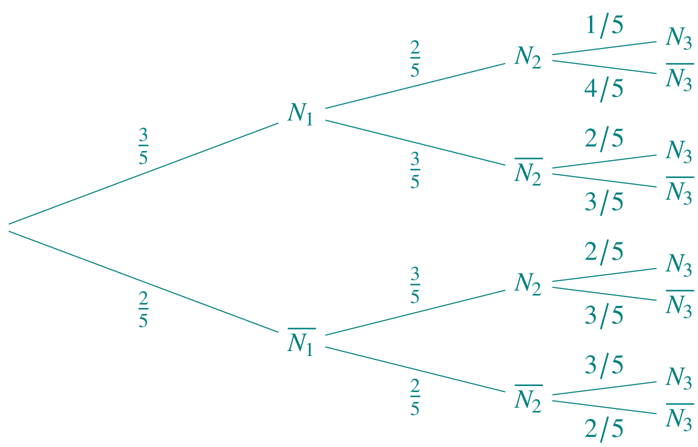


Exemple 2.17 On considère une urne qui contient initialement deux boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs (avec ordre) de la manière suivantes.

- Lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'évènement "On obtient une boule noire au k-ième tirage" et Y l'évènement "On obtient pour la première fois une boule blanche au 3-ième tirage". Déterminer la probabilité de Y.

La situation peut être résumée par l'*arbre suivant*.



On cherche à déterminer la probabilité de l'évènement Y. Tout d'abord, on peut remarquer que

$$Y = N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}$$

Les évènements ne sont pas indépendants. On calcule donc cette probabilité grâce à la **formule des probabilités composées de la manière suivante**.

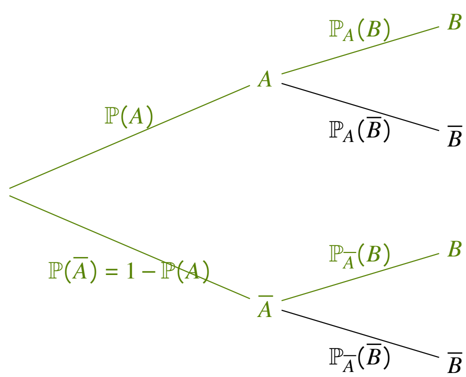
$$\begin{aligned} P(Y) &= P(N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \\ &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(\overline{N_3}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{24}{125} \end{aligned}$$

2.5 Formule des probabilités totales

Proposition 2.18 — Formule des probabilités totales. Soient B un évènement et $A_1, \dots, A_n$ un **système complet d'événements**, avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Autrement dit, sur un arbre de probabilité, la probabilité qu'un évènement se réalise est la somme des chemins qui le réalisent.



$\rightarrow \quad \mathbb{P}(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

2.6 Formule de Bayes

Proposition 2.19 — Formule de Bayes. Si A et B sont des évènements de probabilités non nulles, alors

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}.$$

La formule de Bayes sert à "remonter le temps". Elle permet de calculer la probabilité de A sachant B, avec A qui a lieu avant B... On cherche la probabilité d'une cause possible, connaissant le résultat.

Exemple 2.20 Un groupe d'amis souhaite passer la soirée dans l'une des trois discothèques valables de Biarritz qu'ils choisissent au hasard. Dans la discothèque *Pipeline*, l'animateur passe du reggae avec une probabilité $1/4$, dans la discothèque *Mundaka*, l'animateur en passe avec une probabilité $4/10$ et dans la discothèque *JBay*, avec une probabilité $3/10$.

1. Quelle est la probabilité d'aller dans la discothèque *Pipeline* ou dans la discothèque *JBay* ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas aller dans la discothèque *Pipeline* ?
3. Quelle est la probabilité d'aller dans la discothèque *Pipeline* et d'entendre du reggae ?
4. Quelle est la probabilité que lors de leur soirée, le groupe d'amis entende du reggae ?
5. Quelle est la probabilité que le groupe d'amis ait choisi la discothèque *Mundaka* sachant qu'en entrant dans la discothèque choisie, il ont entendu du reggae.

On pourra utiliser les notations suivantes.

Pi : « Les amis sortent au *Pipeline* » $\qquad$ J : « Les amis sortent au *JBay* »

M : « Les amis sortent au *Mundaka* » $\qquad$ R : « Un titre de reggae est diffusé »

L'énoncé nous donne les *informations suivantes*.

- Tout d'abord, le choix de la discothèque est **uniforme/équiprobable**. Donc

$$P(Pi) = P(J) = P(M) = \frac{1}{3}$$

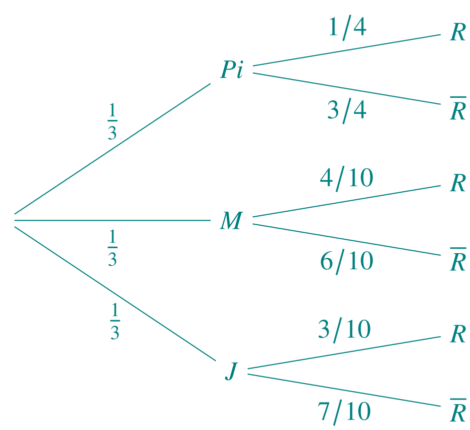
- Puis, la probabilité d'entendre du reggae sachant qu'on est dans la discothèque Pipeline est de $1/4$, c'est-à-dire

$$P_{Pi}(R) = \frac{1}{4}$$

- De même,

$$P_M(R) = \frac{4}{10} \qquad \text{et} \qquad P_J(R) = \frac{3}{10}$$

La situation peut être résumée par l'*arbre suivant*.



1. On cherche $P(Pi \cup J)$. Comme les évènements sont incompatibles, on a

$$P(Pi \cup J) = P(Pi) + P(J) = \frac{2}{3}.$$

2. On cherche $P(\overline{Pi})$. En passant au complémentaire, on a,

$$P(\overline{Pi}) = 1 - P(Pi) = \frac{2}{3}.$$

3. On cherche $P(Pi \cap R)$. Les évènements ne sont pas indépendants ! On utilise donc la **formule des probabilités totales** pour obtenir,

$$P(Pi \cap R) = P(Pi) \times P_{Pi}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

4. On cherche $P(R)$. Comme (Pi, M, J) est un système complet d'évènements dont chacun des évènements est non négligeable, en utilisant la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned} P(R) &= P(Pi)P_{Pi}(R) + P(M)P_M(R) + P(J)P_J(R) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{40}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{30}{100} \\ &= \frac{19}{60} \end{aligned}$$

5. Il s'agit de calculer $P_R(M)$. Par **formule de Bayes**, on a

$$P_R(M) = \frac{P(M)P_M(R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{40}{100}}{\frac{19}{60}} = \frac{8}{19}.$$

3 Indépendance

3.1 Indépendance de deux événements

Définition 3.1 Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque

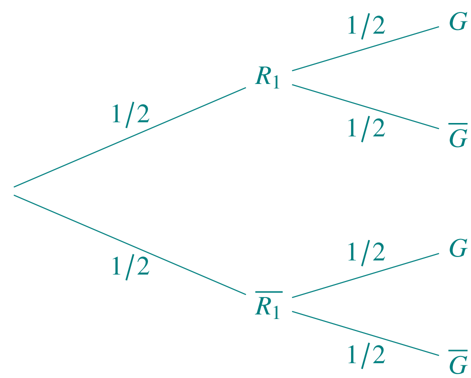
$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

autrement dit, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ lorsque

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{ou} \qquad P_A(B) = P(B).$$

Exemple 3.2 On fait tourner deux fois une roue (tirage avec ordre) avec une zone rouge et une zone bleue de même surface. Si on tombe sur deux couleurs différentes, on gagne 1 euro, et sinon on perd 1 euro. On note R_1 :« on tombe sur rouge au premier tour » et G :« On gagne 1 euro ». Les événements R_1 et G sont-ils indépendants ?

On peut représenter cette situation part un arbre de probabilité.



D'une part, par équiprobabilité,

$$P(R_1) = \frac{1}{2}$$

D'autre part, en utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$P(G) = P(R_1)P_{R_1}(G) + P(\overline{R}_1)P_{\overline{R}_1}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, en utilisant la formule des probabilités composées, on a,

$$P(R_1 \cap G) = P(R_1) \times P_{R_1}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Donc

$$P(R_1 \cap G) = P(R_1) \times P(G)$$

et donc les deux évènements sont indépendants.

3.2 Indépendance mutuelle

Définition 3.3 Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements.
Les événements A_i sont dits **mutuellement indépendants** lorsque, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$:

$$P\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

En particulier, les évènements sont deux à deux indépendants.

Par exemple, A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si et seulement si :

$$\begin{array}{lclclcl} P(A_1 \cap A_2) & = & P(A_1)P(A_2) & \text{et} & P(A_1 \cap A_3) & = & P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_2) & = & P(A_2)P(A_3) & \text{et} & P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) & = & P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{array}$$

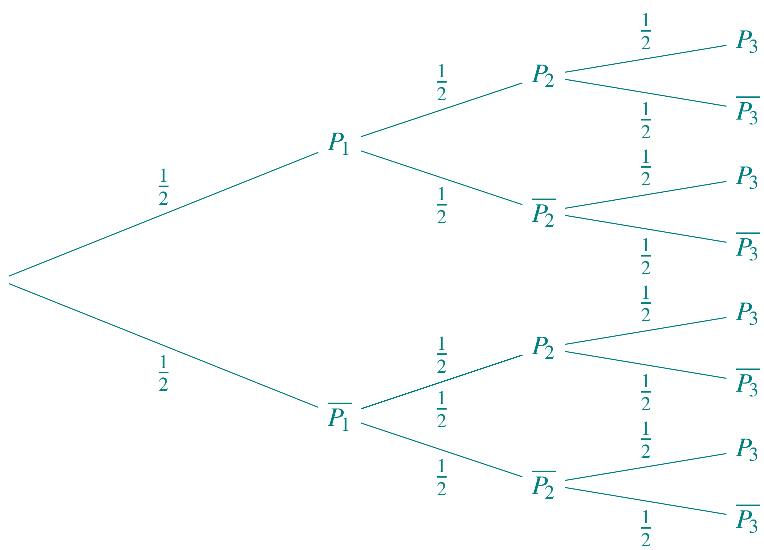
Exemple 3.4 On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce de monnaie et on note, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, F_k : Le k-ième lancer amène un Face. Alors les événements F_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 3.5 Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements. Si $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors, si on pose, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$, les événements $B_1, \cdots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Exemple 3.6 On lance trois fois (tirage avec ordre) une pièce non truquée. On note, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, P_k l'évènement "Obtenir Pile au k-ième lancer»

1. Quelle est la probabilité d'obtenir Face au premier tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir Face au premier tirage et Pile au deuxième tirage ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir que des Pile lors des trois lancers ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des trois lancers ?

Regardons d'abord ce qu'il se passe avec un arbre.



1. On cherche $P(\overline{P_1})$. En passant au **complémentaire**, on obtient que,

$$P(\overline{P_1}) = 1 - P(P_1) = \frac{1}{2}$$

2. On cherche $P(\overline{P_1} \cap P_2)$. Comme les lancers sont **indépendants**, on obtient directement que,

$$P(\overline{P_1} \cap P_2) = P(\overline{P_1}) \times P(P_2) = \frac{1}{4}$$

3. On cherche $P(P_1 \cap P_2 \cap P_3)$. Comme les lancers sont **indépendants**, on obtient directement que,

$$P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = P(P_1) \times P(P_2) \times P(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

4. On cherche $P(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$. Les évènements ne sont pas incompatibles. On peut soit utiliser la **formule du Crible** (c'est long) soit passer par l'évènement **contraire** et exploiter l'**indépendance** des lancers de la manière suivante,

$$P(P_1 \cup P_2 \cup P_3) = 1 - P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) = 1 - P(\overline{P_1}) \times P(\overline{P_2}) \times P(\overline{P_3}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

4 Quelle formule et quand ?

- **Calculer la probabilité d'un contraire** – *Ou quand l'évènement est associé à une négation/comporte le mot «pas».*
  - Par passage au complémentaire, on a
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$
- **Calculer la probabilité d'une intersection** – *Ou quand l'évènement comporte le mot «tous».*
  - Intersection finie de deux évènements indépendants :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
  - Intersection finie d'évènements mutuellement indépendants :
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$
  - Intersection finie d'évènements (non nécessairement indépendants) : en utilisant la formule des probabilités composées,
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_1) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$
- **Calculer la probabilité d'une union** – *Ou quand l'évènement comporte le mot «au moins».*
  - Union de deux ou trois évènements (non nécessairement incompatibles) : formule de Poincaré
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
  - Union finie d'évènements deux à deux incompatibles :
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$
  - Union finie d'évènements mutuellement indépendants : leurs contraires sont aussi mutuellement indépendants et
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k))$$
- **Calculer la probabilité d'un évènement dépendant du passé** – *Ou quand l'énoncé comporte une disjonction de cas avec l'idée d'une temporalité*
  - En utilisant la formule des probabilités totales, on a,
$$P(B) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n) P_{A_n}(B)$$
- **Calculer la probabilité d'un évènement du passé sachant le futur**
  - En utilisant la formule de Bayes, on a,
$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}.$$