TD 15 – Probabilités

Exercice 1 – Probabilité uniforme. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules ensemble (tirage sans ordre). Déterminer

1. la probabilité d'obtenir deux boules portant toutes les deux des numéros pairs,
2. puis la probabilité d'obtenir deux boules portant toutes les deux des numéros de même parité.

Exercice 2 – Probabilité uniforme. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules successivement et avec remise. Déterminer

1. la probabilité d'obtenir deux boules portant toutes les deux des numéros pairs,
2. puis la probabilité d'obtenir deux boules portant toutes les deux des numéros de même parité.

Exercice 3 – Probabilité uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir n boules noires ? *On pourra commencer par traiter le cas* $n = 3$.

Exercice 4 – Probabilité uniforme. À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 9 touches : 1,2,...,9. Le code d'ouverture de la porte est composé d'un nombre de quatre chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Le code a été changé et choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il comporte au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient pairs ?
   (c) Quelle est la probabilité que les quatre chiffres soient différents ?

Exercice 5 – Probabilité uniforme. Un jeu de cartes comporte 32 cartes. On choisit au hasard une main de 8 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un cœur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux carrés (ensemble de quatre cartes de même valeur) ?

Exercice 6 – Indépendance. On lance deux fois un dé équilibré et on considère les événements suivants :

- A_1 : " la somme des deux lancers est égale à 6".
- A_2 : " la somme des deux lancers est égale à 7".
- B : " le premier lancer donne 4".

Les événements A_1 et B sont-ils indépendants ? Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?

Exercice 7 – Indépendance. On lance trois pièces de monnaie amenant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. Les trois lancers sont indépendants. Soient A l'événement " il est apparu au moins un pile et au moins un face" et B l'événement " il est apparu au plus un pile". Les événements A et B sont-ils indépendants si $p = 1/4$? si $p = 1/2$?

Exercice 8 – Utilisation des formules. On dispose de trois urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, l'urne numéro k contient k boules blanches et $(3-k)$ boules noires. L'expérience consiste à choisir une urne au hasard, puis à tirer au hasard une boule dans cette urne. Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on note U_k l'évènement «Obtenir l'urne numéro k» et B l'évènement «On obtient une boule blanche».

1. Quelle est la probabilité que l'on choisisse l'urne 1 ?
2. Quelle est la probabilité qu'on tire une boule blanche sachant qu'on a choisit l'urne 1 ?
3. Quelle est la probabilité que l'on choisisse l'urne 1 ou l'urne 2 ?
4. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?
5. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne 1 sachant que la boule est blanche ?

Exercice 9 – Utilisation des formules. On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?
5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule le soit aussi ?

Exercice 10 – Utilisation des formules. *Exceptionnellement, on pourra utiliser la calculatrice pour les applications numériques.* Une maladie touche 20% de la population d'un pays. Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,70.
- lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population. On appelle valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

1. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?
2. Mêmes questions en supposant cette fois que 60% des personnes sont touchées.

Exercice 11 – Utilisation des formules. Un système complexe est formé de trois machines M_1, M_2 et M_3 qui peuvent indépendamment tomber en panne dont les probabilités de panne sont respectivement : p_1, p_2 et p_3.
Le système tombe en panne dès que l'une au moins des trois machines est en panne.

1. Déterminer la probabilité de panne du système.
2. Le système étant tombé en panne, quelle est la probabilité que la machine M_1 soit tombée en panne ?

Exercice 12 – Utilisation des formules. Soit $p \in]0,1[$. On lance plusieurs fois une pièce donnant à chaque lancer Pile avec la probabilité p. On arrête les lancers

- soit, si on n'obtient aucun pile lors des cinq premiers lancers, on s'arrête après le cinquième lancer
- soit, on s'arrête après avoir eu le premier Pile (pendant les cinq premiers lancers).

On note, pour tout $k \in \{1,\dots,5\}$, X_k l'évènement «On a effectué k lancers». Calculer

$$\forall k \in \{1,\dots 5\}, \qquad P(X_k).$$

On suppose que les lancers sont indépendants.

Exercice 13 – Vers les probabilités sur un univers inifni. Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 4 noires, et une urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 noires. On effectue une infinité de tirages dans les conditions suivantes :

- tous les tirages se font avec remise;
- on effectue un premier tirage dans U_1;
- si un tirage donne une boule blanche le tirage suivant se fait dans U_1, sinon il se fait dans U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement «Obtenir une boule blanche au n-ième tirage» et $p_n = P(B_n)$.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n. *On pourra tracer une portion de l'arbre des probabilités qui correspond seulement aux tirages numéro n et $n+1$.*
2. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 14 – Exercice type concours. On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires indiscernables au toucher. On effectue une série de tirages d'une boule en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans U;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

- U_n l'événement " le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U";
- V_n l'événement " le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V";
- B_n l'événement " la n-ième boule est blanche";
- N_n l'événement " la n-ième boule est noire".

On a $P(U_1) = 1$.

1. (a) Calculer $P(U_2)$.
   (b) Calculer $P(U_3)$.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules blanches lors des trois premiers tirages.
3. Une personne arrive à l'issue du deuxième tirage et sait simplement que la boule qui vient d'être tirée est blanche. Quelle est la probabilité que le deuxième tirage ait eu lieu dans l'urne U ?
4. (a) Démontrer en utilisant la formule des probabilités totales que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} P(U_n)$$
   (b) Écrire alors une fonction python prenant en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $P(U_n)$, en utilisant cette relation.
5. Déterminer alors la valeur de $p_n = P(U_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer $P(B_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 15 – Programme de 2ième année - Chaîne de Markov. On considère trois points A, B, C du plan. L'objectif de l'exercice est l'étude du mouvement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces points. A l'étape 0, on suppose que le pion est en A. Ensuite, on suppose que le déplacement vérifie les règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "à l'instant n, le pion se situe en A" et l'on définit de même les évènements B_n et C_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note également $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(c_n)$ ainsi que
$$V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$
le n-ième état probabiliste de cette chaîne de Markov.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov étudiée. On la notera M.
2. (a) Déterminer a_0, b_0, c_0.
   (b) Déterminer a_1, b_1, c_1.
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (d) De même, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (e) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times M$.
   (f) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times M^n$.

On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
5. Démontrer par récurrence que que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.
7. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n, b_n et c_n.
9. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. On dit que la chaîne de Markov admet un état stable s'il existe
    $$U = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$
    tel que $x+y+z = 1$ et tel que $M^T U^T = U^T$. Déterminer si cette chaîne de Markov admet un état stable et le déterminer le cas échéant.

Exercice 16 – Inspiré d'un sujet de concours. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $n = a+b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs de la manière suivante.

- Lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'évènement "On obtient une boule noire au k-ième tirage" et Y_k l'évènement "On obtient pour la première fois une boule blanche au k-ième tirage". Soit $k \in \{1,\dots,b+1\}$ fixe dans tout ce problème.

1. Justifier l'égalité suivante :
$$Y_k = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap \overline{N}_k$$
2. Donner $P(N_1)$.
3. Soit $i \in \{2,\dots,k-1\}$.
   (a) Si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, combien de boules noires y'a-t-il dans l'urne ? combien de boules au total y'a-t-il dans l'urne ?
   (b) En déduire
$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i).$$
4. De la même façon, en déduire
$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(\overline{N}_k).$$
5. En déduire, grâce à la formule des **probabilités composées**, que
$$P(Y_k) = \frac{(a+k-1)b!}{n^k(b-k+1)!}$$

Exercice 17 – Type concours. Une société de location de vélos possède trois magasins, un à Rosnoën, un à Landerneau et un à Miliza. Lorsqu'un(e) client(e) loue un vélo, un jour donné, dans une des trois villes, il/elle le restitue le lendemain dans un des trois magasins, puis un autre client reprend le vélo et ainsi de suite. Une étude statistique a permis de montrer que, pour un vélo donné :

- s'il est loué à Rosnoën un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{3}{4}$,
- s'il est loué à Landerneau un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et à ramené à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- s'il est loué à Milizca, il est laissé à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissé à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n, on note

R_n : "Le vélo se trouve à Rosnoën le n-ième jour"	et	$r_n = P(R_n)$
L_n : "Le vélo se trouve à Landerneau le n-ième jour"	et	$\ell_n = P(L_n)$
M_n : "Le vélo se trouve à Milizac le n-ième jour"	et	$m_n = P(M_n)$

On suppose qu'au départ, le jour 0, le vélo est à Rosnoën.

1. (a) Donner r_0, ℓ_0 et m_0.
   (b) Tracer l'arbre des probabilités correspondant à ce qu'il se passe le jour 0 et le jour 1.
   (c) Calculer r_1 et ℓ_1 et m_1.
2. (a) Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n.$$
   (b) Déterminer une relation analogue entre ℓ_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.
   (c) Déterminer une relation analogue entre m_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.
3. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation
$$U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$
   (a) Donner U_0.
   (b) À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$
   (c) Démontrer alors par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$
4. On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que pour tout $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
   (b) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer que D est une matrice diagonale.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
   (e) Montrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$
   (f) En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$
   (g) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de U_n.
5. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n, ℓ_n et m_n en fonction de n.
   (b) Vérifier que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n + \ell_n + m_n = 1.$$
   (c) Déterminer les limites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. (a) Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour ?
   (b) Le fait que le vélo se trouve à Landerneau le premier jour est-il indépendant du fait qu'il se trouve à Milizac le deuxième jour ?