TD 15 – Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 – .

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\Omega &= 8+7+6+5+4+3+2+1+0\\ &= \frac{8\times 9}{2}\\ &= \binom{9}{2}\end{aligned}$$

card ("les deux num sont pairs")$= \binom{4}{2} = 6$

card ("les deux num sont impairs")$= \binom{5}{2} = 10$

Donc P ("obtenir deux num pairs") $= 6/36 = 1/6$

Donc $P($ "même parité" $) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ (union disjointe)

Exercice 2 – .

$\operatorname{card}\Omega = 9\times 9 = 81$

card("les deun x pairs") $= 4\times 4$

card("les deux impours") $= 5\times 5$

Donc P ("obtenir 2 num pairs) $= \frac{4\times 4}{9\times 9} = \frac{16}{81}$

Donc $P($ "même parité" $) = \frac{16}{81} + \frac{25}{81} = \frac{41}{81}$

Exercice 3 – .

card $\Omega = n(n-1)\times\ldots\times 1(n+1)$

card (" n boules noires") $= n\times(n-1)\times\ldots\times 1$

$P($ boules noires" $) = \frac{n!}{2n\times\times(n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Exercice 4 – . cord$(\Omega) = 9^4$

card ("aucun 7") $= 8\times 8\times 8\times 8$

$P(\bar{A}) = \dfrac{8^4}{9^4}$

$P(A) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{8^4}{9^4}$

$P($ "tous pairs" $) = \frac{4^4}{9^4}$

P ("tous les chiffres diff") $= \dfrac{9\times 8\times 7\times 6}{9^4} = \dfrac{8\times 7\times 6}{9^3}$

Exercice 5 – .

$\operatorname{card}(\Omega) = \binom{32}{8}$

$P($ "aucun coeur" $) = \dfrac{\binom{32-8}{8}}{\binom{32}{8}} = \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

$P($ "au moins un coeur" $) = 1 - \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

$P($ "obtenir deux carrés" $) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{8}}$

Exercice 6 – . $\Omega = [\![1,6]\!]^2$

en particulier card $\Omega = 36$

$A_1 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

donc $P(A_1) = \dfrac{5}{36}$

$A_2 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

donc $P(A_2) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$B = \{(4,1),(4,2),\ldots,(4,6)\}$

donc $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$A_1 \cap B = \{(4,2)\}$ $\quad$ $A_2 \cap B = \{(4,3)\}$
donc $P(A_1 \cap B) = \frac{1}{36}$ $\quad$ donc $P(A_2 \cap B) = \frac{1}{36}$
$P(A_1 \cap B) \neq P(A_1) \times P(B)$ donc A_1 et B me sont pas indépendants
$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P(B)$ donc A_2 et B sont indépendants.

Exercice 7 – .

Exercice 8 – .

1. $P(U_1) = 1/3$ (proba uniforme)
2. $P_{U_1}(B) = 1/3$ (proba uniforme)
3.

$$\begin{aligned} P(U_1 \cup U_2) &= P(U_1) + P(U_2) \\ &= 1/3 + 1/3 \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

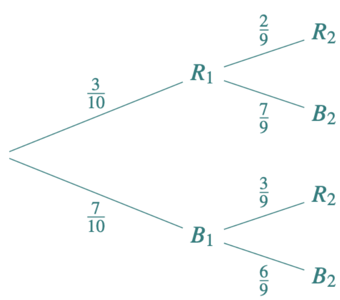
4. - Formule des proba totales:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1) P_{U_1}(B) + P(U_2) P_{U_2}(B) + P(U_3) P_{U_3}(B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{3} \\ &= \frac{6}{9} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Retour en arrière $\rightarrow$ Formule de Bayes

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1) P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Exercice 9 – .



1. On cherche à calculer $P(R_1)$. D'après l'énoncé, comme au premier tirage, la probabilité de tirer chaque boule est uniforme, on a

$$P(R_1) = \frac{3}{10}.$$

2. On cherche à calculer $P(R_1 \cap R_2)$. D'après la formule des probabilités composées, on a,

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

3. On cherche à calculer $P(R_2)$. Comme (R_1, B_1) est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}P(R_2) &= P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(R_2)\\ &= \frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\\ &= \frac{1}{15}+\frac{7}{30}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

4. On cherche à calculer $P(R_1\cup R_2)$. En utilisant la formule du crible, on a

$$\begin{aligned}P(R_1\cup R_2) &= P(R_1)+P(R_2)-P(R_1\cap R_2)\\ &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{15}\\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

en utilisant les valeurs trouvées aux questions 1,2 et 3 .

5. On cherche à calculer $P_{R_2}(R_1)$. D'après la formule de Bayes, on a

$$P_{R_2}(R_1)=\frac{P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{9}.$$

Exercice 10 – .

1. On cherche $P_T(M)$ "retour dans le temps" $\to$ Bayes

$$P_T(M)=\frac{P(M)P_M(T)}{P(T)}$$

Or, formule des proba totales ($(M,\bar{M})$ syst. complet d'evenements)

$$\begin{aligned}P(T) &= P(M)P_M(T)+P(\bar{M})P_{\bar{M}}(T)\\ &= 0,18\end{aligned}$$

Finalement,

$$P_T(M)=\frac{0,2\times 0,70}{0,18}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}\simeq 0,78$$

non efficace

2.

$$P(T)=0,44$$

puis $P_T(M)\simeq 0,956$ efficace

Exercice 11 – .

1. On cherche $P(M_1\cup M_2\cup M_3)$

On va calculer (ou formule du crible + indépendance)

$$\begin{aligned}P(\bar{M}_1\cap\bar{M}_2\cap\bar{M}_3) &= P(\bar{M}_1)P(\bar{M}_2)P(\bar{M}_3)\ \text{ par indépendance}\\ &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\end{aligned}$$

puis $P(M_1\cup M_2\cup M_3)=p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+p_1p_2p_3=P(s)$

2. On vent $P_S(M_1)$ "retour ds le tps" $\to$ Bayes.

$$\begin{aligned}P_S(M_1) &= \frac{P(M_1)P_{M_1}(S)}{P(S)}\\ &= \frac{p_1\times 1}{p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+p_1p_2p_3}\end{aligned}$$

Exercice 12 – Notons $\forall k \in \{1,.,5\}, P_k$ "obtenir Pile au k-ième lancer".

- $\mathbb{P}(X_1) = \mathbb{P}(P_1)$
$= P$

$\forall k \in \{2,3,4\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k) &= \mathbb{P}(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \ldots \cap \bar{P}_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbb{P}(\bar{P}_1) \times \mathbb{P}(\bar{P}_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(\bar{P}_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) \\ &= (1-p) \times (1-p) \times \ldots \times (1-p) \times p \\ &= (1-p)^{k-1} \times p\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_5) = \mathbb{P}(\bar{P}_1 \cap \ldots \cap \bar{P}_4 \cap P_5) \cup (\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \ldots \cap \bar{P}_5))$$

soit on obtient le 1$^{\text{er}}$ pile au 5$^{\text{e}}$ lance soit on obtient aucun Pile

$$= \mathbb{P}(\bar{P}_1 \cap \ldots \cap \bar{P}_4 \cap P_5) + \mathbb{P}(\bar{P}_1 \cap \ldots \cap \bar{P}_5)$$

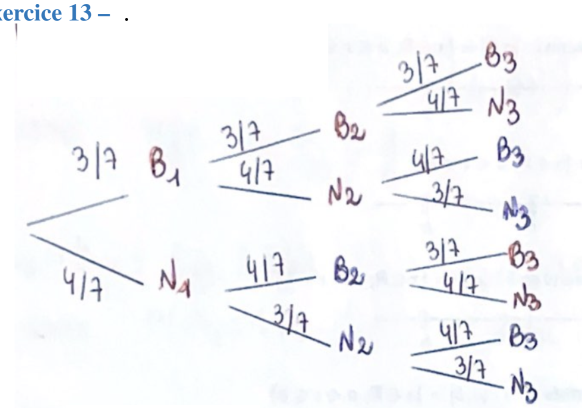
car les évènements $\bar{P}_1 \cap \cap \bar{P}_4 \cap P_5$ et $\bar{P}_1 \cap \cap \cap \bar{P}_5$ sont incompatibles

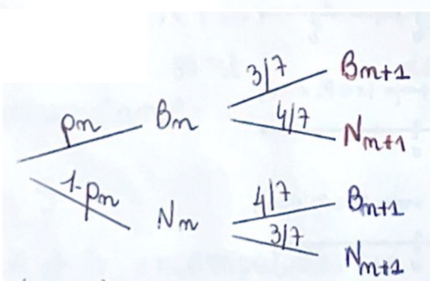
$$= \mathbb{P}(\bar{P}_1)_{\times \ldots \times} \mathbb{P}(\bar{P}_4) \times \mathbb{P}(P_5) + \mathbb{P}(\bar{P}_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(\bar{P}_5)$$

car les lancers sont indépendants

$$\begin{aligned}&= (1-p)^4 \times p + (1-p)^5 \\ &= (1-p)^4[p+1-p] \\ &= (1-p)^4\end{aligned}$$

Exercice 13 – .



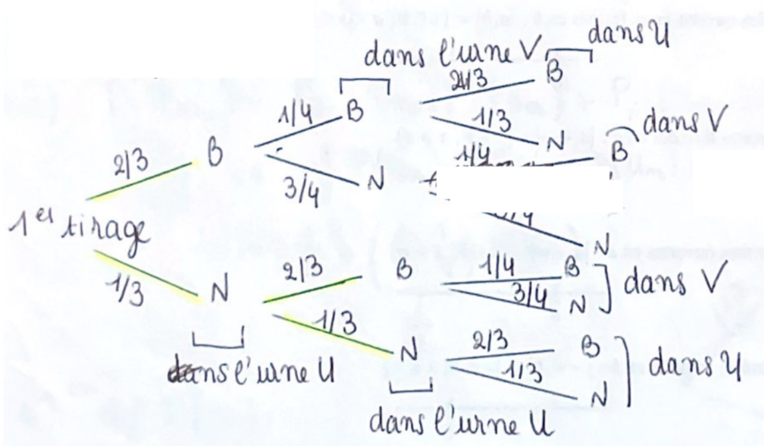


1. $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{N_n}(B_{n+1}) \times P(N_n)$

$$\begin{aligned}P_{n+1} &= \frac{3}{7} \times p_n + \frac{4}{7} \times (1-p_n) \\ &= \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n\end{aligned}$$

2. $\left(l = \frac{1}{2}\right) \quad p_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{m-1}$

Exercice 14 – .



$P(U_2) = \quad P_{U_1}(N)P(U_1) = \frac{1}{3} \times 1$
$P(U_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$

2.

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \\
&= \frac{2}{3} \times P_{V_2}(B_2) \times P_{u_3}(B_3) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

3.

$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{P_{U_2}(B_2)P(U_2) + P_{V_2}(B_2)P(V_2)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}$$
$$= \frac{4}{7}$$

4.a

$$\begin{aligned}
P(U_{n+1}) &= P_{U_n}(U_{n+1})P(U_n) + P_{V_n}(U_{n+1})P(V_n) \\
&= \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) \\
&= \frac{1}{4} + (\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}})P(u_n)
\end{aligned}$$

4.b

def $P(n)$:
  p=1
  for k in range $(2, n+1)$:
    $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}p$
  return (p)

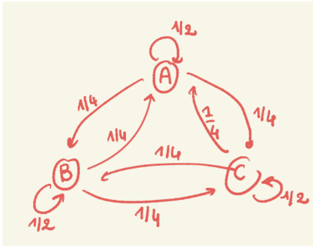
5. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}u_n \end{cases}$

suite arithmético-géométrique

$$l = \frac{3}{11}$$
$$u_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}$$

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= P_{u_n}(B_n)P(u_n) + P_{v_n}(B_n)P(V_n) \\
&= \frac{2}{3} \times u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n) \\
&= \frac{40}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{4}{11}
\end{aligned}$$

Exercice 15 – .



$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) $a_0 = 1; b_0 = 0; c_0 = 0$

b) $a_1 = P(A_1 \cap A_0) = P(A_0) P_{A_0}(A_1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad b_1 = \frac{1}{4} \quad ; c_1 = \frac{1}{4}$

c) (A_n, B_n, C_n) SCE donc proba totale,

d) $P(A_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) P_{C_n}(A_{n+1})$

$$= a_m \times \frac{1}{2} + b_m \times \frac{1}{4} + c_m \times \frac{1}{4}$$

et de même pour les autres

f) Recurrence

3. $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Récurrence

6. $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 4 \times M^n \ldots$

7. $M = \frac{1}{4} A$

8. $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 \times M^n = \frac{1}{3\times 4^n} diag\left(4^n + 2 \quad 4^n - 1 \quad 4^n - 1\right)$

9.

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n + 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \to \frac{1}{3} & \text{car } -1 < \frac{1}{4} < 1 \\ b_n = 3 \times 4^n (4^n - 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \to \frac{1}{3} \\ c_n = b_n \end{cases}$

10. $U = \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\right)$

Exercice 16 – 1. Soit $k \in \{1, \ldots, b+1\}$. Pour obtenir pour la première fois une boule blanche au k-ième tirage, il faut n'avoir obtenu que des boules noires au $k-1$ premières tirages et avoir obtenu une boule blanche au k-ième tirage. D'où

$$Y_k = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap \bar{N}_k$$

2. Au départ, dans l'urne, il y a a boule blanches et b boules noires et donc n boules au total. Comme le tirage est uniforme, la probabilité de tirer une boule noire à ce moment est donc

$$P(N_1) = \frac{b}{n}$$

3. (a) Soient $k \in \{1, \ldots, b+1\}$ et $i \in \{2, \ldots, k-1\}$. Si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, comme chaque boule noire est remplacée par une boule blanche, alors il reste $b-(i-1)$ boules noires et $a+(i-1)$ boules blanches dans l'urne et ainsi toujours n boules au total.

(b)

Soient $k \in \{1, \ldots, b+1\}$ et $i \in \{2, \ldots, k-1\}$. En utilisant la Question 3(a), comme le tirage est uniforme, la probabilité de tirer une boule noire au i-ième tirage, sachant que l'on a obtenu que des boules noires pendant les $i-1$ premiers tirages, est de

$$P_{N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{b-(i-1)}{n}$$

4. Si les $k-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, comme chaque boule noire est remplacée par une boule blanche, alors il reste $b-(k-1)$ boules noires et $a+(k-1)$ boules blanches dans l'urne et ainsi toujours n boules au total. Donc, comme le tirage est uniforme, la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage, sachant que l'on a obtenu que des boules noires pendant les $k-1$ premiers tirages, est de

$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(\bar{N}_k) = \frac{a+(k-1)}{n}.$$

5. En utilisant la Question 1 et la formule des probabilités composées, on a

$$P(Y_k) = P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)\times P_{N_1\cap N_2}(N_3)\times P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-2}}(N_{k-1})\times P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(\bar{N}_k)$$

Donc, en utilisant les résultats des Questions 2, 3(b) et 4, on obtient,

$$\begin{aligned}
P(Y_k) &= \frac{b}{n}\times\frac{b-1}{n}\times\cdots\times\frac{b-(k-2)}{n}\times\frac{a+(k-1)}{n}\\
&= \frac{b\times(b-1)\times\cdots\times(b-(k-2))\times(a+k-1)}{n^k}\\
&= \frac{b\times(b-1)\times\cdots\times(b-k+2))\times(b-k+1)\times(b-k)\times\cdots\times 2\times 1\times(a+k-1)}{n^k\times(b-k+1)\times(b-k)\times\cdots\times 2\times 1}\\
&= \frac{(a+k-1)b!}{n^k(b-k+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 17 –