TD 16 – Continuité d'une fonction

Étude de la continuité

Exercice 1 – *[S'inspirer des Exemples 1.8 et 1.9]*
Étudier la continuité des fonctions suivantes:

1. $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

2. $h: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \end{cases} \end{array}$

3. $g: \begin{array}{ccl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}$

4. $i: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \end{array}$

Exercice 2 – Prolongement par continuité. *[S'inspirer des Exemples 1.16, 1.17 et 1.18]*
On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
b) Justifier que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.
c) Déterminer la limite de f en 0.
d) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

Exercice 3 – Lien entre continuité et convergence d'une suite. *[S'inspirer des Exemples 1.13 et 1.14]* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1/2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4} \times (u_n - 2)$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers une limite finie que l'on notera ℓ.
5. Déterminer la valeur de ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 4 – Théorème des valeurs intermédiaires. *[S'inspirer de l'Exemple 2.5]*
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{3x} + x \end{array}$$

Montrer que l'élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre 0 et 1.

Exercice 5 – Théorème des valeurs intermédiaires. *[S'inspirer de l'Exemple 2.7]*
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} - x^2 \end{array}$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 – Théorème de la bijection. *[S'inspirer de l'Exemple 2.21]*
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} + x \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ dans un intervalle à déterminer. On note φ la bijection réciproque associée.
3. Dresser le tableau de variation de φ.

Exercice 7 – Théorème de la bijection. *[S'inspirer de l'Exemple 2.22]*
1. Montrer que l'équation $\ln(x) = e^{-x}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $1 < \alpha < e$. *On pourra commencer par montrer que $f(1) < f(\alpha) < f(e)$.*

Exercice 8 – Théorème de la bijection. *[S'inspirer de l'Exemple 2.23]*
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Préciser la valeur de u_0.
4. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{n}$. *On pourra utiliser le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x$.*
6. Quelle est la limte de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 9 – Théorème de la bijection. On considère les fonctions f et g définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{1+e^x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Étudier les variations de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α.
4. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > \alpha \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *On pourra utiliser la question 3.*
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut α.

Exercice 10 – Théorème de la bijection. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3-3x^2+1 \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
2. Tracer l'allure de la courbe.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

Exercice 11 – Suites définies de manière implicite. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - nx \end{array}$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $]-\infty, \ln(n)]$ et une unique solution v_n sur $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 3$.
4. Soit $n \geqslant 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 – Étude d'une suite définie par récurrence. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+8}{6} \end{array}$$

et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0,2[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Justifier que f est continue.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ sur le même schéma.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Donner le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
6. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) \in [0,2]$.
7. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$?
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. *On pourra utiliser la question 5.*
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ.
10. Montrer que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 13 – Existence d'un point fixe. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 14 – Ecricome 2023. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < e < 3$. *On admet que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.*

1. (a) Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

   (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
   (d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0,+\infty[$ possède exactement deux solutions u_n et v_n avec

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
   (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite finie que l'on notera ℓ.
   (c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.