DEVOIR MAISON 5

Exercice 1 – On considère la fonction $f : x \longmapsto xe^{-\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A: Étude de f.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
3. On donne $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x)$
   (b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.
5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$.
6. (a) Établir: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 1$.
   (b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.
7. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.

Partie B. Étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

8. Écrire une fonction Python, nommée u, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n en sortie.
9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in]0;1]$.
10. Étudier les variations de (u_n).
11. (a). Établir : $\forall x \in]0;1], f(x) \leq \frac{1}{e}x$.
    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
    (c) Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite (u_n).
    (d) Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu. Donnée : $20\ln(10) \simeq 46,05$.
    (e)Le programme suivant (dans lequel u est la fonction Python définie à la question 1 de la partie B) affiche la valeur 4 . Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```
n=0
while u(n)>10**(-20)
    n=n+1
print (n)
```

12. Considérons la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
    (a) Étudier les variations de (S_n).
    (b) A l'aide du résultat établi à la question 5(b) de la partie B , démontrer que la suite (S_n) est majorée.
    (c) Que peut-on en déduire?

Exercice 2 – Une société de location de vélos possède trois magasins, un à Rosnoën, un à Landerneau et un à Miliza. Lorsqu'un(e) client(e) loue un vélo, un jour donné, dans une des trois villes, il/elle le restitue le lendemain dans un des trois magasins, puis un autre client reprend le vélo et ainsi de suite. Une étude statistique a permis de montrer que, pour un vélo donné :

- s'il est loué à Rosnoën un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{3}{4}$,
- s'il est loué à Landerneau un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et à ramené à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- s'il est loué à Milizca, il est laissé à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissé à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n, on note

R_n : "Le vélo se trouve à Rosnoën le n-ième jour" et $r_n = P(R_n)$
L_n : "Le vélo se trouve à Landerneau le n-ième jour" et $\ell_n = P(L_n)$
M_n : "Le vélo se trouve à Milizac le n-ième jour" et $m_n = P(M_n)$

On suppose qu'au départ, le jour 0, le vélo est à Rosnoën.

1. (a) Donner r_0, ℓ_0 et m_0.
   (b) Tracer l'arbre des probabilités correspondant à ce qu'il se passe le jour 0 et le jour 1.
   (c) Calculer r_1 et ℓ_1 et m_1.
2. (a) Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n.$$
   (b) Déterminer une relation analogue entre ℓ_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.
   (c) Déterminer une relation analogue entre m_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.
3. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation
$$U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$
   (a) Donner U_0.
   (b) À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$
   (c) Démontrer alors par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$
4. On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que pour tout $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
   (b) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer que D est une matrice diagonale.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
   (e) Montrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$
   (f) En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$
   (g) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de U_n.
5. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n, ℓ_n et m_n en fonction de n.
   (b) Vérifier que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n + \ell_n + m_n = 1.$$
   (c) Déterminer les limites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. (a) Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour ?
   (b) Le fait que le vélo se trouve à Landerneau le premier jour est-il indépendant du fait qu'il se trouve à Milizac le deuxième jour ?