

Chapitre 17 : Variables Aléatoires Finies

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé : Ω est un **univers**, \mathcal{A} est l'ensemble des **événements** et \mathbb{P} est une **probabilité** sur l'univers Ω .

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Notion de variable aléatoire

Définition 1.1 Une **variable aléatoire** est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, qui à chaque issue, associe un nombre réel telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x]$ est un événement. On note alors $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises. On dit que cette variable aléatoire est **finie** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est fini et **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est infini (dénombrable).

Définition 1.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω . On définit les événements suivants :

- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X = k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X \leq k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq k\}$.
- Pour tout $A \subset \Omega$, $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

Exemple 1.3 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. On note, pour tout $n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, P_n l'événement "Obtenir Pile au n -ième lancer".

Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience) $\Omega = \dots$

Ensemble des valeurs prises par la v.a. X $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$

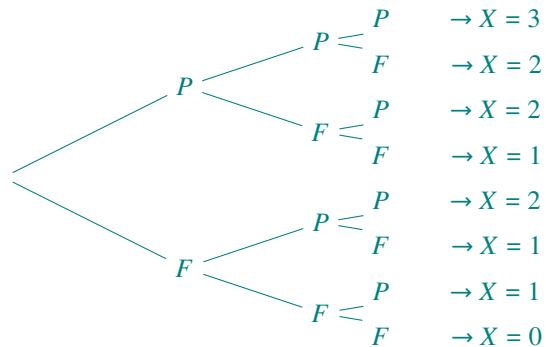
Alors,

$$[X = 0] = \bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \bar{P}_3$$

$$[X = 1] = P_1$$

$$[X = 2] = \bar{P}_1 \cap P_2$$

$$[X = 3] = \bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap P_3$$



Exemple 1.4 On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire qui, à tout lancer, associe la somme des deux résultats. On note, pour tout $k \in \{1, 2\}$ et $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, A_n^k l'événement "Obtenir le chiffre n au k -ième lancer".

Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience) $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$

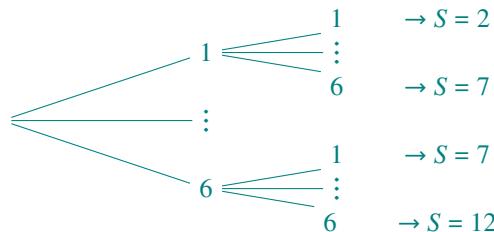
Ensemble des valeurs prises par la v.a. S $S(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$

Alors,

$$[S = 2] = A_1^1 \cap A_1^2$$

$$[S = 3] = (A_1^1 \cap A_2^2) \cup (A_2^1 \cap A_1^2)$$

...



1.2 Loi d'une variable aléatoire

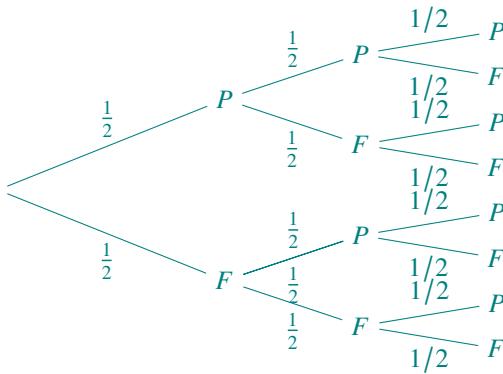
Définition 1.5 La loi de X est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$.



Ne pas confondre l'égalité (ponctuelle) des variables aléatoires et leur égalité en loi. Par exemple, si on lance deux dés et qu'on note X_1 (respectivement X_2) le résultat du premier (resp. du second) lancer), alors il est clair que X_1 et X_2 suivent la même loi (loi uniforme sur $[1, 6]$). En revanche, les variables X_1 et X_2 ne sont pas égales : le résultat du premier dé n'est pas toujours le même que celui du second dé (l'un des deux dés peut par exemple donner un 1 alors que l'autre donne un 6).

Exemple 1.6 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. Donner la loi de X .

Représentons cette situation sur un arbre de probabilité.



Cet arbre (et l'application de certains formules de probabilité !) permet de déduire la loi de X de la manière suivante.

Valeurs de X	0	1	2	3
Probabilité	$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{8}$	$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$	$\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([X = 3]) = \frac{1}{8}$

On remarque que

$$\sum_{k=0}^3 \mathbb{P}([X = k]) = 1$$

Connaissant la loi de X , on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}([X = 4]) = 0$$

$$\mathbb{P}([X \in \{0, 1\}]) = P([X = 0] \cup [X = 1]) = P([X = 0]) + P([X = 1]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{P}([X \geq 2]) = P([X = 2] \cup [X = 3]) = P([X = 2]) + P([X = 3]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

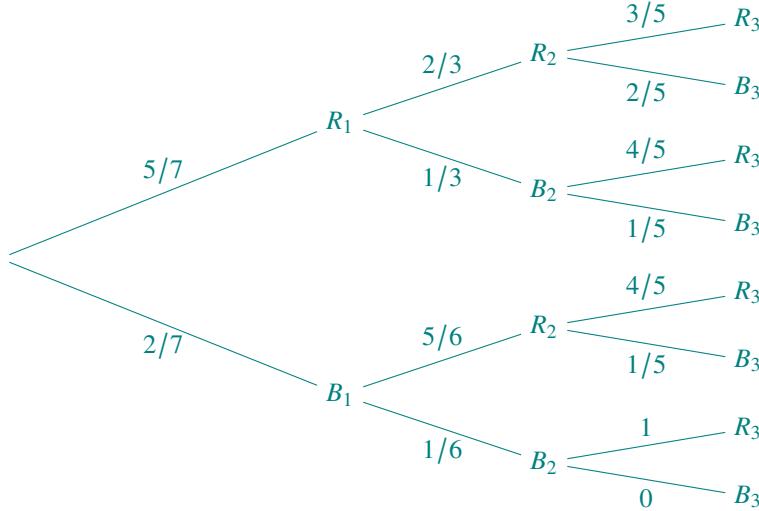
$$\mathbb{P}([X > 2]) = \mathbb{P}([X = 3]) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}([X < 0]) = 0$$

$$\mathbb{P}([0 < X \leq 3]) = P([X = 1] \cup [X = 2] \cup [X = 3]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Exemple 1.7 Dans une urne contenant 2 boules blanches et 5 boules rouges, on tire trois boules, une par une, **sans remise**. On note, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, B_k l'évènement "On tire une boule blanche au k -ième tirage" et R_k l'évènement "On tire une boule rouge au k -ième tirage". Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience. Donner la loi de X .

On peut représenter la situation sur l'arbre de probabilité suivant.



Cet arbre (et l'application de certains formules de probabilité !) permet de déduire la loi de X de la manière suivante.

Valeurs de X	0	1	2
Probabilité	$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{2}{7}$	$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{4}{7}$	$\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{7}$

On remarque que

$$\sum_{k=0}^2 \mathbb{P}([X = k]) = 1$$

Connaissant la loi de X , on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}([X = 3]) = 0$$

$$\mathbb{P}([X \in \{0, 1\}]) = P([X = 0] \cup [X = 1]) = P([X = 0]) + P([X = 1]) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

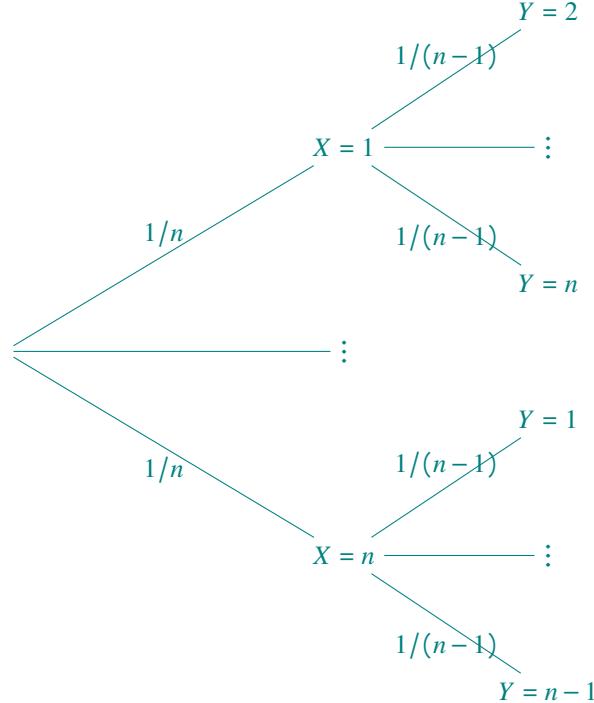
$$\mathbb{P}([X \geq 2]) = P([X = 2]) = \frac{1}{7}$$

$$\mathbb{P}([X > 2]) = 0$$

$$\mathbb{P}([X \geq 1]) = P([X = 1] \cup [X = 2]) = P([X = 1]) + P([X = 2]) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Exemple 1.8 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros. Déterminer la loi de Z .

On peut représenter la situation sur un arbre de probabilité (complété de manière partielle). Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule.



On remarque déjà que

$$Z(\Omega) = \{1, \dots, n\}$$

Puis, regardons au cas par cas.

$$\begin{aligned}
 P(Z = 1) &= P(X = 1 \cup (X = 2 \cap Y = 1) \cup (X = 3 \cap Y = 1) \cup \dots \cup (X = n \cap Y = 1)) \\
 &= P(X_1) + P(X = 2 \cap Y = 1) + P(X = 3 \cap Y = 1) + \dots + P(X = n \cap Y = 1) \\
 &\quad \text{par incompatibilité des événements} \\
 &= P(X_1) + P(X = 2) \times P_{X=2}(Y = 1) + P(X = 3) \times P_{X=3}(Y = 1) + \dots + P(X = n) \times P_{X=n}(Y = 1) \\
 &\quad \text{par formule des probabilités conditionnelles (attention pas d'indépendance !)} \\
 &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\
 &= \frac{n-1+1+1+\dots+1}{n(n-1)} \\
 &= \frac{2(n-1)}{n(n-1)}
 \end{aligned}$$

Proposition 1.9 Soit X une variable aléatoire discrète. La famille $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements et donc

$$\sum_{k \in X(\Omega)} P[X = k] = 1$$

Cette proposition peut servir soit à vérifier nos calculs, soit à trouver une probabilité manquante ou un paramètre manquant.

Exemple 1.10 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = ak^2$$

Déterminer la valeur du paramètre a .

On doit avoir

$$\sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}([X = k]) = a \sum_{k=1}^{10} k^2 = a \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385a.$$

Donc, on doit choisir

$$a = \frac{1}{385}$$

1.3 Transformation d'une variable aléatoire

Proposition 1.11 Soient X une variable aléatoire réelle sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω dont la loi est donnée par

- $Y(\Omega) = \{g(x), x \in X(\Omega)\}$
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}([X = x])$$

Exemple 1.12 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Donner la loi de $V = U^2$.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Tout d'abord,

x	-1	1	4	5
x^2	1	1	16	25

Donc,

$$V(\Omega) = \{1, 16, 25\}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Donc la loi de V est donnée par

Valeurs de V	1	16	25
Probabilité	$\mathbb{P}([V = 1]) = \frac{7}{12}$	$\mathbb{P}([V = 16]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([V = 25]) = \frac{1}{4}$

Détaillons un des calculs.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([V = 1]) &= \mathbb{P}([U^2 = 1]) \\
 &= \mathbb{P}([U = 1] \cup [U = -1]) \\
 &= \mathbb{P}([U = 1]) + \mathbb{P}([U = -1]) \quad \text{par incompatibilité} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

Exemple 1.13 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

Valeurs de X	0	1	2
Probabilité	$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{2}{7}$	$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{4}{7}$	$\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{7}$

Déterminer la loi de $Y = |X - 1|$.

La loi de Y est donnée par

Valeurs de Y	0	1
Probabilité	$\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{4}{7}$	$\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{3}{7}$

2 Moments d'une variable aléatoire

2.1 Espérance

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire finie sur Ω . On appelle **espérance** de X le réel suivant, noté $\mathbb{E}(X)$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

L'espérance représente la *moyenne* de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire.

Proposition 2.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une espérance.

1. Si $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.
2. Si X est une variable aléatoire à valeurs positives, c-à-d $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
3. La variable aléatoire X est dite centrée lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.
4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Exemple 2.3 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que U admet une espérance et la calculer.

Comme U est une variable aléatoire **finie**, elle admet une espérance, qui est donnée par

$$\mathbb{E}(U) = (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{4} = 2$$

Exemple 2.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2k}{n + n^2}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Comme X est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance, qui est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n+1}{3}$$

Exemple 2.5 On lance une fois un dé équilibré à six faces. Soit X la variable aléatoire qui correspond au numéro obtenu. Déterminer l'espérance de X .

Tout d'abord, déterminons la loi de X . Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$$

et les probabilités associées sont

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, 6\}, \quad P([X = k]) = \frac{1}{6}.$$

Comme X est une variable aléatoire **finie**, elle admet une espérance, qui est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{7}{2}$$

Proposition 2.6 — Théorème de transfert. Soient X une variable aléatoire finie et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans déterminer sa loi.

Exemple 2.7 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que $V = U^2$ admet une espérance et la calculer.

- Première méthode : Déterminer la loi de V puis son espérance. La loi de V est donnée par

Valeurs de V	1	16	25
Probabilité	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Comme V est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance, qui vaut

$$\mathbb{E}(V) = 1 \times \frac{7}{12} + 16 \times \frac{1}{6} + 25 \times \frac{1}{4} = \frac{19}{2}$$

- Deuxième méthode : Déterminer l'espérance de V grâce au théorème de transfert (à partir de la loi de U). Comme U est une variable aléatoire **finie**, par **théorème de transfert**, $V = U^2$ admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(V) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{4} = \frac{19}{2}$$

Exemple 2.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2k}{n+n^2}$$

Montrer que $Y = X^2$ admet une espérance et la calculer.

Comme X est une variable aléatoire **finie**, par **théorème de transfert**, $Y = X^2$ admet une espérance, qui est donnée par,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2 Variance

Définition 2.9 Soit X une variable aléatoire finie sur Ω . On appelle **variance** de X le réel suivant, noté $V(X)$,

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

La variance et l'écart-type mesurent l'écart entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance, ce sont des mesures de *dispersion*.

Proposition 2.10 — Formule de Koenig-Huygens. Soit X une variable aléatoire réelle finie. On a

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire finie sur Ω et notons $m = \mathbb{E}(X)$. On a,

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}[(X - m)^2] && \text{par définition de la variance} \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2mX + m^2] && \text{en développant} \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2mX] + \mathbb{E}[m^2] && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + m^2\mathbb{E}[1] && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2m^2 + m^2 && \text{car } \mathbb{E}(X) = m \text{ et } \mathbb{E}(1) = 1 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - m^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \end{aligned}$$

■

Proposition 2.11 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une variance.

1. Alors $V(X) \geq 0$.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2V(X)$.
3. Lorsque $V(X) = 1$, X est dite réduite.

Exemple 2.12 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que U admet une variance et la calculer.

Comme U est une variable aléatoire **finie**, elle admet une variance. De plus, on a déjà calculé que (cf Exemples 2.3 et 2.7),

$$\mathbb{E}(U) = 2 \quad \text{et} \quad E(U^2) = \frac{19}{2}$$

Donc, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, la variance de U est donnée par

$$V(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{19}{2} - 4 = \frac{11}{2}$$

2.3 Écart-type

Définition 2.13 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart-type de X est le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 2.14 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle. Alors,

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée - c-à-d $\mathbb{E}(X^*) = 0$ - et réduite - c-à-d $V(X^*) = 1$ -, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X** .

Démonstration. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle et

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire centrée. Par **linéarité** de l'espérance, on a,

$$\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)} (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire réduite. On a,

$$V(X^*) = V\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X) = 1$$

■

3 Lois usuelles finies

3.1 Variable aléatoire certaine

Définition 3.1 Une variable aléatoire **certaine** est une variable aléatoire finie qui ne prend qu'une seule valeur. Autrement dit, c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\{a\}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ dont la loi est donnée par,

$$\mathbb{P}([X = a]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{a\}, \mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire certaine à valeurs dans $\{a\}$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = a \times \mathbb{P}([X = a]) = a$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - a^2$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = a^2 \times \mathbb{P}([X = a]) = a^2$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = 0.$$

■

3.2 Loi uniforme

Définition 3.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont la loi est donnée par,

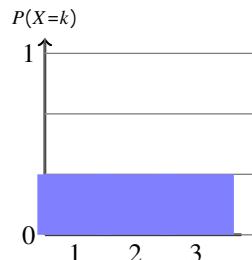
$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$



Cette loi permet de modéliser des situations d'**équiprobabilité**. Par exemple, si on lance un dé équilibré à six faces et que l'on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu, alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. Cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Démonstration. Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{(n+1)^2}{4}$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}$$

■

Définition 3.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a < b$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $\llbracket a, b \rrbracket$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\llbracket a, b \rrbracket$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{b-a+1}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Exemple 3.4 — Ecrime 2017, Maths S. On dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée. On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Dans cette question que $n = 1$. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

Lorsque $n = 1$, on dispose d'une seule urne. Chaque boule va donc toujours dans cette unique urne. Ainsi, cette unique urne contiendra deux boules forcément au deuxième tirage. C'est une situation **déterministe** (sans aléa). La variable aléatoire X_1 est une variable aléatoire **certaine** :

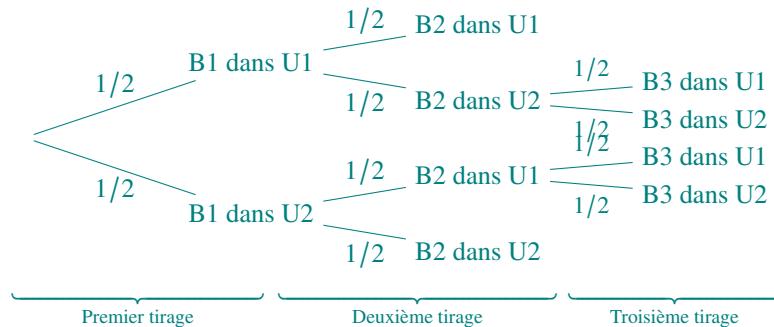
$$P([X_1 = 2]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}, \quad P([X_1 = k]) = 0$$

La variable aléatoire X_2 est **finie**, elle admet donc une espérance et une variance données par

$$\mathbb{E}(X_1) = 2 \quad \text{et} \quad V(X_1) = 0.$$

2. Dans cette question que $n = 2$. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

Lorsque $n = 2$, on dispose de deux urnes. Chaque boule va de façon **équiprobable** dans l'une des deux urnes. Représentons cette situation sur un arbre de probabilité.



Grâce à cet arbre de probabilité, on voit que

$$X_2(\Omega) = \{2, 3\}$$

De plus, par **formule des probabilités totales** (non détaillée ici)

$$P([X_2 = 2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De même,

$$P([X_2 = 3]) = \frac{1}{2}$$

Donc, la variable X_2 suit une **loi uniforme** sur $\llbracket 2, 3 \rrbracket$:

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2, 3 \rrbracket)$$

3.3 Loi de Bernoulli

Définition 3.5 Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X **de Bernoulli de paramètre** p est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0, 1\}$ dont la loi est donnée par,

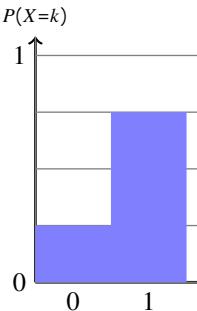
$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$



Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : **le succès et l'échec**, avec une probabilité p d'obtenir un succès. On associe à cette expérience la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Alors X suit une loi $\mathcal{B}(p)$. Par exemple, pour $p = \frac{1}{3}$, cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0^2 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = p$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$



Exemple 3.6 — EML 2018, Maths S. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k -ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents et prenant la valeur 0 sinon.

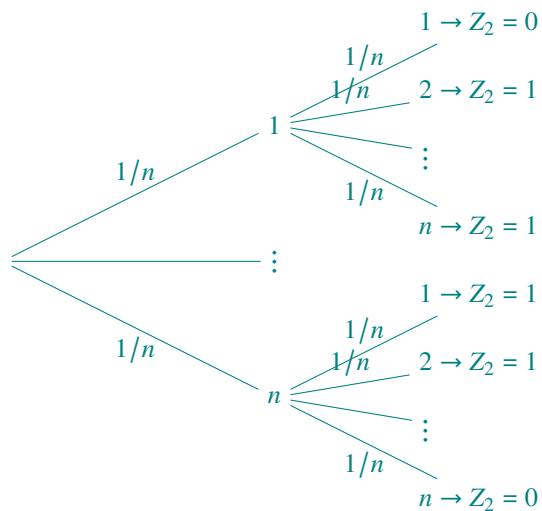
1. Déterminer la loi de Z_1 .

Au premier tirage, on tire forcément un numéro non tiré. C'est une situation **déterministe** (sans aléa). La variable aléatoire Z_1 est une variable **certaine** :

$$\mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \mathbb{P}([Z_1 = k]) = 0$$

2. Déterminer la loi de Z_2 .

Pour trouver la loi de Z_2 , on s'intéresse au numéro du deuxième tirage (et à savoir s'il est différent du numéro du premier tirage). Représentons cette situation sur un arbre de probabilité.



On sait déjà que

$$Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$$

Puis, d'après la **formule des probabilités totales**,

$$\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Puis, en passant à l'**événement complémentaire**, on a,

$$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 0]) = 1 - \frac{1}{n}$$

Donc, Z_2 est suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $1 - \frac{1}{n}$:

$$Z_2 \sim \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

3.4 Loi de binomiale

Définition 3.7 Soient $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **binomiale de paramètres n et p** est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ dont la loi est donnée par,

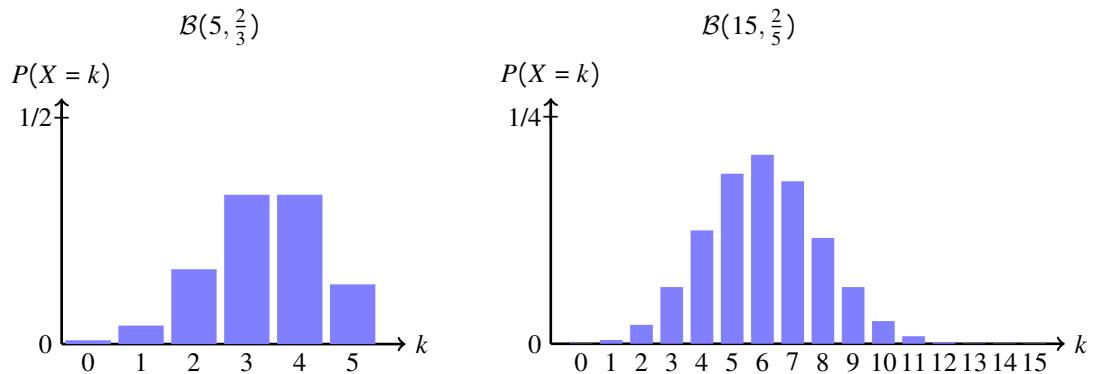
$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$



Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : le **succès** et l'**échec**. On **répète n** fois une telle épreuve de manière identique et indépendante. On associe à cette expérience la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus alors de ces n épreuves. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Ces situations peuvent être représentées par des diagrammes en barres comme ceux ci-dessous.



Preuve de l'espérance. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Comme X est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Donc, finalement, on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k - 1 \\ &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-1-\ell} \\ &= np(p+1-p)^{n-1} && \text{grâce au binôme de Newton} \\ &= np \end{aligned}$$



Preuve de la variance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Comme X^2 est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par, d'après le **théorème de transfert**,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, k \neq 1$,

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= k(k-1) \binom{n}{k} + k \binom{n}{k} \\ &= \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} + k \binom{n}{k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} + k \binom{n}{k} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \mathbb{E}(X) + \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^{\ell+2} (1-p)^{n-\ell-2} && \text{en faisant le ch't d'indice } \ell = k-2 \\ &= np + n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-2-\ell} \\ &= np + n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} && \text{grâce au binôme de Newton} \\ &= np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Comme X est une variable aléatoire finie, X admet une variance et d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, elle vaut,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

■

Exemple 3.8 On réalise 10 tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues. Donner la loi de X .

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on fait un tirage, on obtient une boule bleue (le succès) avec probabilité $3/8$ et on obtient une boule rouge (échec) avec probabilité $5/8$.
- On répète 10 fois cette expérience, de manière identique et indépendante (car tirage avec remise).
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{B}(10, \frac{3}{8})$.

Exemple 3.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus. Donner la loi de X .

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on lance un dé, on obtient un 6 (le succès) avec probabilité $1/6$ et on n'obtient tout sauf un 6 (échec) avec probabilité $5/6$.
- On répète n fois cette expérience, de manière identique et indépendante.
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.