

# XIX. Dérivabilité

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Étude locale de la dérivée</b>                          | <b>4</b>  |
| 1.1      | Dérivabilité en un point                                   | 4         |
| 1.2      | Dérivabilité à gauche/à droite                             | 5         |
| 1.3      | Interprétation géométrique de la dérivée en un point       | 6         |
| 1.4      | Développement limité à l'ordre 1                           | 7         |
| <b>2</b> | <b>Étude globale de la dérivée</b>                         | <b>8</b>  |
| 2.1      | Dérivabilité sur un intervalle                             | 8         |
| 2.2      | Opérations sur les fonctions dérivables                    | 9         |
| 2.3      | Exemples                                                   | 10        |
| <b>3</b> | <b>Dérivées successives</b>                                | <b>12</b> |
| <b>4</b> | <b>Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables</b> | <b>15</b> |
| 4.1      | Inégalité des accroissements finis                         | 15        |
| 4.2      | Monotonie des fonctions dérivables                         | 19        |
| 4.3      | Conséquence sur les extrema locaux                         | 20        |

## Pour bien démarrer

### #1 - Connaître les dérivées usuelles et les formules de dérivation.

|                                                    |                                                           |                                                                       |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$               | $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$                     | $(u + v)' = u' + v'$                                                  |
| $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n$             | $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$              | $(ku)' = ku'$ pour $k \in \mathbb{R}$                                 |
| $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x^n}$ | $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$  | $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$                           |
| $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$   | $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$      | $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$                         |
| $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$      | $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$   |
| $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x$             | $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$                   | $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \ln(x)$        | $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{x}$         | $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$        |

**Exemple 0.1** Calculer le plus efficacement la dérivée des fonctions suivantes.

- i)  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$
- ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(6) \exp(x^3)$
- iii)  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{x^2 + 3x}{2}$



Avant de calculer une dérivée, on justifie la dérivabilité de la fonction ! Et on n'oublie pas les quantificateurs lorsque l'on donne la dérivée.

- i) Tout d'abord, la fonction est bien définie sur  $\mathbb{R}_+$  et on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = x - 1.$$

Donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = 1.$$

- ii) Tout d'abord, la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la fonction est de la forme  $ku$  avec  $k \in \mathbb{R}$  une **constante** (pas besoin d'utiliser la formule de dérivation d'un produit ici) donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \ln(6) \times (3x^2 \exp(x^3)) = 3\ln(6)x^2 \exp(x^3).$$

- iii) Tout d'abord, la fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, la fonction est de la forme  $ku$  avec  $k \in \mathbb{R}$  une **constante** (pas besoin d'utiliser la formule de dérivation d'un quotient ici) donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1}{2} \times (2x + 3)$$

## #2 - Savoir borner une expression.

**Exemple 0.2** On considère la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : [-2, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$$

Montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -2, +\infty[$  et

$$\forall x \in ] -2, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$



*Attention, pour démontrer une inégalité sur un segment  $[a, b]$ , de manière générale, il ne suffit pas de regarder ce que vaut la fonction aux bornes !*

Comme la dérivée est positive sur  $] -2, +\infty[$  et donc sur  $[0, +\infty[$ , déjà, on remarque que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Soit  $x \in [0, +\infty[$ . On a

$$x \geq 0 \quad \text{donc} \quad x+2 \geq 2.$$

Or la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  donc

$$\sqrt{x+2} \geq \sqrt{2}.$$

Donc, en multipliant cette inégalité par 2 et en utilisant le fait que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on obtient que

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Finalement, on a bien montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**#3 - Savoir étudier la limite d'une suite grâce au théorème des gendarmes.**

**Exercice 0.3** On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_0 = 2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}.$$

2. En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1.  *On dispose d'une information reliant deux termes consécutifs  $u_{n+1}$  et  $u_n$  et on veut en déduire une information sur le terme général de la suite : on fait une récurrence !*

Montrons par **récurrence** que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \ll |u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} \gg.$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - 1| \leq \frac{1}{2^0} = 1.$$

D'après l'énoncé,  $u_0 = 2$  donc  $|u_0 - 1| = 1 \leq 1$ . Et donc, la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

- *Hérédité.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On veut montrer que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

D'après l'énoncé, on sait que

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|.$$

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}.$$

2.  *On a une inégalité sur le terme général de la suite : on utilise le théorème des gendarmes pour en déduire la limite de la suite !*

Par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc, par théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

# 1 Étude locale de la dérivée

## 1.1 Dérivabilité en un point

**Définition 1.1** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On dit que la fonction  $f$  est **dérivable au point  $a$**  si le **taux d'accroissement** de  $f$  en  $a$ , c'est-à-dire le nombre réel

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé de  $f$  en  $a$**  et on note  $f'(a)$ , la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**?** En faisant le changement de variables  $x = a + h$ , le **taux d'accroissement de  $f$  en  $a$**  peut s'écrire aussi

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

et alors le **nombre dérivé de  $f$  en  $a$**  est donné par

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

**!** Les taux d'accroissement peuvent servir principalement à deux choses.

- ① Étudier la dérivabilité d'une fonction (*connaissant une limite, on en déduit la dérivabilité*).
- ② Calculer une limite (*connaissant la dérivabilité d'une fonction, on en déduit une limite*).

**Exemple 1.2 — ① Étudier la dérivabilité.**

| Fonction          | Point $a$ | Taux d'accroissement en $a$                                                                                                                  | De limite en $a$                                                             | Dérivée en $a$                |
|-------------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $f(x) = x^2$      | 0         | $\frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = x$                                                                                                                | $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$                                               | $f'(0) = 0$                   |
| $f(x) = x^2$      | $a$       | $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$                                                                                   | $\lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a$                                          | $f'(a) = 2a$                  |
| $g(x) = \sqrt{x}$ | 0         | $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$                                                                                     | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$                        | Non dérivable en 0            |
| $g(x) = \sqrt{x}$ | $a > 0$   | $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ | $g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ |

**Exemple 1.3 — ② Calculer une limite.** (♥) Calculer les limites suivantes

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

iii)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

iv)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h}$

**GI** Il faut reconnaître des taux d'accroissements!

i) La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et en particulier en  $a = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \quad \text{c-à-d} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

ii) La fonction  $g : x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en  $a = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) \quad \text{c-à-d} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

iii) La fonction  $j : x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et en particulier en  $a = 1$  donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(1+h) - j(1)}{h} = j'(1) \quad \text{c-à-d} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2}.$$

iv) La fonction  $k : x \mapsto x^n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier en  $a = 1$  donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(1+h) - k(1)}{h} = k'(1) \quad \text{c-à-d} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h} = n.$$

## 1.2 Dérivabilité à gauche/à droite

**Définition 1.4** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- On dit que la fonction  $f$  est **dérivable à droite** au point  $a$  si le **taux d'accroissement** de  $f$  en  $a$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a^+$ . Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé à droite de  $f$  en  $a$**  et on note  $f'_d(a)$ , la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- On dit que la fonction  $f$  est **dérivable à gauche** au point  $a$  si le **taux d'accroissement** de  $f$  en  $a$  admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a^-$ . Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $a$**  et on note  $f'_g(a)$ , la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Proposition 1.5** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a$  lorsque

- $f$  est dérivable à droite en  $a$ ,
- $f$  est dérivable à gauche en  $a$ ,
- et  $f'_d(a) = f'_g(a)$ .

Dans ce cas, le **nombre dérivé de  $f$  en  $a$**  est donné par

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

❗ Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point en lequel l'**expression change**, on peut regarder si les dérivées à gauche et à droite existent et sont égales. Dans ce cas, la fonction est dérivable en ce point, de dérivée égale à la valeur commune.

En résumé, pour une fonction dont l'expression change

- pour avoir de la continuité au point de jonction, il faut que les deux morceaux se recollent,
- pour avoir de la dérivabilité au point de jonction, il faut que les deux morceaux se recollent avec la même pente.

**Exemple 1.6** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

GI La fonction a une expression différente sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la dérivabilité à droite et à gauche.

- Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x + 1$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Donc  $f$  est dérivable à droite et  $f'_d(0) = 1$ .

- Pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) = e^x$  donc, en reconnaissant une limite usuelle,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche et  $f'_g(0) = 1$ .

- Comme  $f'_d(0) = f'_g(0)$ , la fonction  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

**Exemple 1.7** Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

**GI** La fonction valeur absolue a une expression différente sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la dérivabilité à droite et à gauche.

- Pour tout  $x > 0$ ,  $|x| = x$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Donc  $f$  est dérivable à droite et  $f'_d(0) = 1$ .

- Pour tout  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

Donc  $f$  est dérivable à gauche et  $f'_g(0) = -1$ .

- Comme  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ , la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

**!** Si  $f$  est définie sur un intervalle  $I = [a, b]$ , la dérivabilité en  $a$  équivaut à la dérivabilité à droite en  $a$  et la dérivabilité en  $b$  équivaut à la dérivabilité à gauche en  $b$ .

### 1.3 Interprétation géométrique de la dérivée en un point

**Proposition 1.8** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Notons  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

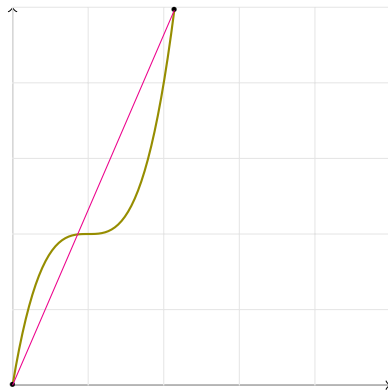
- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors la tangente au point d'abscisse  $a$  à  $\mathcal{C}_f$  est la droite d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Si le taux d'accroissement en  $a$  diverge vers  $\pm\infty$ , c'est-à-dire si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty,$$

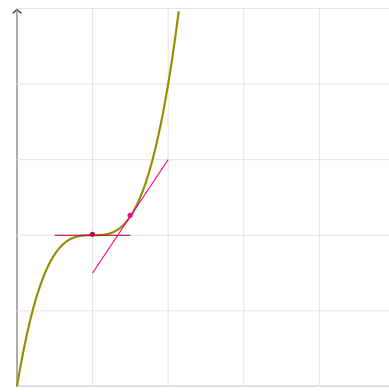
alors  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $a$ , d'équation  $x = a$ .



Le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points  $(a, f(a))$  et  $(x, f(x))$ . Lorsque les deux points sont «éloignés», cela correspond à «la pente moyenne».



Le nombre dérivé

$$f'(a)$$

correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $a$ . Cela correspond à regarder la pente entre deux points «très proche» et donc de regarder «la pente instantanée».

## 1.4 Développement limité à l'ordre 1

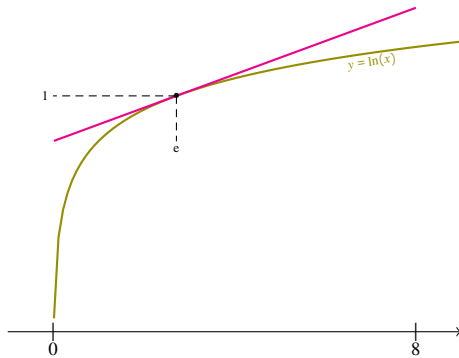
**Proposition 1.9** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  admet un **développement limité à l'ordre 1 en  $a$** , c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que, pour tout  $h \in I$  «suffisamment petit», on a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

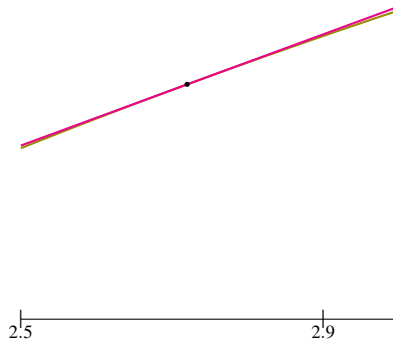
De manière équivalente, pour tout  $x \in I$  «suffisamment proche de  $a$ », on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

De manière informelle, cela signifie que si on «zoome suffisamment fort» sur la courbe de la fonction autour du point  $(a, f(a))$ , la courbe de la fonction «ressemble beaucoup» à sa tangente au point d'abscisse  $a$ . On dit que localement autour d'un point, on peut confondre la courbe de la fonction et sa tangente.



Globalement, la courbe du logarithme et de sa tangente en  $e$  sont très différentes.



Mais si on «zoome suffisamment fort», la courbe du logarithme et de sa tangente en  $e$  sont quasiment confondues.

De manière informelle, on peut retenir que, au «voisinage de 0», on a

$$e^x - 1 \approx x \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \approx x.$$

On peut utiliser un développement limité pour calculer une limite lorsque l'on ne reconnaît pas directement un/des taux d'accroissement(s).

**Exemple 1.10** Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

• **Méthode 1 : Par développement limité.** La fonction exponentielle est dérivable en  $a = 0$  donc il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  «suffisamment proche de 0», on a

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

De même, la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable en  $a = 0$  donc il existe une fonction  $\tilde{\varepsilon}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  «suffisamment proche de 0», on a

$$\ln(1+x) = 0 + x + x\tilde{\varepsilon}(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0.$$

Donc, finalement, pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  «suffisamment proche de 0», on a

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \frac{x + x\varepsilon(x)}{x + x\tilde{\varepsilon}(x)} = \frac{1 + \varepsilon(x)}{1 + \tilde{\varepsilon}(x)}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1.$$

- **Méthode 2 : En reconnaissant des taux d'accroissements.** On a,

$$\forall x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}, \quad \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

On reconnaît alors deux taux d'accroissements. Comme  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto \ln(1+x)$  sont dérivables en 0, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1 \times \frac{1}{1} = 1.$$

**Proposition 1.11** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  alors la fonction  $f$  est continue en  $a$ .
- La réciproque est fautive : si une fonction est continue en un point, elle n'est pas forcément dérivable en ce point.

*Démonstration.* Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $a$ . Montrons que la fonction  $f$  est continue en  $a$ , c'est-à-dire montrons que la fonction  $f$  admet une limite en  $a$  et que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Comme  $f$  est dérivable en  $a$ , il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que pour tout  $x \in I$  «suffisamment proche de  $a$ », on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

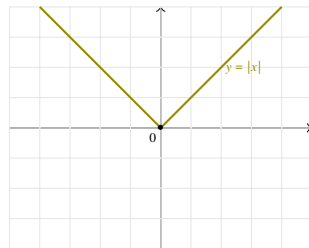
En particulier, en passant à la limite [ $x \rightarrow a$ ] dans cette égalité, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

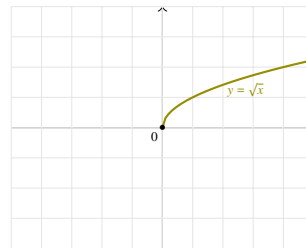
■



Attention, attention et encore attention. La réciproque est fautive ! La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0. De même, la fonction racine carrée est continue en 0 mais pas dérivable en 0.



La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 : les pentes à gauche et à droite ne sont pas les mêmes.



La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 : la dérivée explose (pente infinie).

## 2 Étude globale de la dérivée

### 2.1 Dérivabilité sur un intervalle

**Définition 2.1** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **dérivable sur**  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ . On définit alors sa **fonction dérivée** par

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de  $f$  le plus grand ensemble sur lequel  $f$  est dérivable.

**Proposition 2.2** Toute fonction dérivable sur un intervalle  $I$  est continue sur cet intervalle  $I$ .

**Proposition 2.3 — Dérivabilité des fonctions usuelles.**

- Les fonctions constantes,  $x \mapsto x^n$ ,  $\exp$ ,  $\ln$  sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- La fonction inverse est définie, continue et dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .
- La fonction racine carrée est définie et continue sur  $[0, +\infty[$  mais seulement dérivable sur  $]0, +\infty[$ .
- La fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$  mais seulement dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- La fonction partie entière est définie sur  $\mathbb{R}$  mais pas continue sur  $\mathbb{R}$  donc pas dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

**Proposition 2.4** Les combinaisons linéaires, le produit, l'inverse, le quotient et la composée (s'ils sont bien définis) de fonctions dérivables sont des fonctions dérivables.

**Proposition 2.5** Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction **bijective** de  $I$  sur  $J$ , de bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$ .

On suppose que

- ① la fonction  $f$  est **dérivable** sur  $I$ ,
- ② la dérivée de  $f$  ne s'**annule pas** sur  $I$ .

Alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

**?** On peut retrouver cette formule ! On part du fait que pour tout  $x \in J$ ,  $(f \circ f^{-1})(x) = x$ . Puis, on dérive en utilisant la formule de la dérivation d'une composée, pour obtenir que, pour tout  $x \in J$ ,  $f^{-1}(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$ . On n'a plus qu'à diviser par  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  pour retrouver le résultat.

**Exemple 2.6** On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = ]0, \frac{1}{2}[$  par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 2e^{-x}\sqrt{x}.$$

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection entre  $I$  et un intervalle à déterminer.
2. On note  $g = f^{-1}$ . Justifier que  $g$  est dérivable sur  $J$  et que

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \frac{2\sqrt{g(x)}}{e^{-g(x)}(1 - 2g(x))}.$$

1. Pour montrer que  $f$  réalise une bijection entre  $I$  et un intervalle à déterminer, on va appliquer le théorème de la bijection.

- ① La fonction  $f$  est définie sur l'**intervalle**  $I$ .
  - ② La fonction  $f$  est **continue** sur  $I$ .
  - ③ Montrons que la fonction  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$ .
- (P) La fonction est dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 2 \times (-e^{-x})\sqrt{x} + 2e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}(1 - 2x)}{2\sqrt{x}} \geq 0.$$

(E) L'équation  $f'(x) = 0$  n'admet aucune solution dans  $I$ .

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur

$$J = \left]0, \frac{2e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right[.$$

2. Comme  $f$  est dérivable sur  $I$  (par produit) et  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , sa bijection réciproque est dérivable sur  $J$ . De plus,

$$\forall x \in J, \quad f(g(x)) = x \quad \text{c-à-d} \quad 2\exp(-g(x))\sqrt{g(x)} = x.$$

Donc, en dérivant cette formule, on obtient,

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \frac{2\sqrt{g(x)}}{e^{-g(x)}(1-2g(x))}.$$

## 2.3 Exemples



Dès qu'on peut, on étudie directement la dérivabilité d'une fonction **par opérations** sur les fonctions usuelles qui sont dérivables. On étudie la dérivabilité **via le taux d'accroissement** seulement aux points pathologiques : lorsqu'il y a un **changement d'expression** de la fonction, ou une **racine carrée/valeur absolue** dans l'expression de la fonction.

**Exemple 2.7** Montrer que la fonction suivante est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

- ① **Dans un premier temps, on étudie la dérivabilité.** La fonction  $x \mapsto x^2 + x + 1$  est bien dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynomiale. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 > 0,$$

car le discriminant du polynôme est strictement négatif et que le coefficient dominant est strictement positif. De plus, la fonction logarithme est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Donc, **par composition**, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- ② **Dans un second temps, on calcule la dérivée.** Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

**Exemple 2.8** Montrer que la fonction suivante est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$



*Il y a une valeur absolue dans l'expression de la fonction : problème potentiel de dérivabilité en 0 !*

- ① **Dans un premier temps, on étudie la dérivabilité.**

- La fonction  $x \mapsto |x|$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc la fonction  $x \mapsto 1 + |x|$  aussi. De plus, la fonction  $x \mapsto 1 + |x|$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^*$ . Donc, **par passage à l'inverse** et **multiplication** par une fonction polynomiale, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Étudions la dérivabilité en 0 via le **taux d'accroissement**.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + |x|} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

- Finalement, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- ② **Dans un second temps, on calcule la dérivée.**

- Sur  $] -\infty, 0[$  :

$$\forall x < 0, \quad f(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{donc} \quad \forall x < 0, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- Pour  $x = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .

- Sur  $]0, +\infty[$  :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{donc} \quad \forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

**Exemple 2.9** Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{x})$$

**GI** Il y a une racine carrée dans l'expression de la fonction : problème potentiel de dérivabilité en 0 !

- ① Dans un premier temps, on donne l'ensemble de définition de la fonction  $f$ . La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie sur  $[0, +\infty[$ . De plus,

$$\forall x > 0, \quad 1 + \sqrt{x} > 0.$$

Comme la fonction logarithme est définie sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$  est définie sur  $[0, +\infty[$ . Finalement, par produit, la fonction  $f$  est définie sur  $[0, +\infty[$ .

- ② Dans un second temps, on étudie la dérivabilité.

– La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et

$$\forall x > 0, \quad 1 + \sqrt{x} > 0.$$

De plus, la fonction logarithme est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Donc par **composée** et par **produit**, la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

– Étudions la dérivabilité en 0 via le **taux d'accroissement**.

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1 \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

– Finalement, la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ .

- ③ Enfin, on calcule la dérivée là où elle est définie.

– Pour  $x = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .

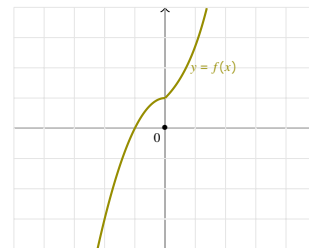
– Sur  $]0, +\infty[$  :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1 + \sqrt{x}) + \sqrt{x} \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1 + \sqrt{x})}.$$

**Exemple 2.10** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Faire une conjecture sur la continuité et dérivabilité de la fonction à partir du graphe.
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Donner le domaine de dérivabilité de la fonction  $f$ .



**GI** Fonction définie par morceaux : problème potentiel de continuité et dérivabilité à la jonction, c'est-à-dire en  $x = 0$ . De plus, comme elle est définie par morceaux, pour étudier la continuité et la dérivabilité, il faut faire les limites à droite et à gauche.

1. Le graphe ne comporte pas de «trous», donc la fonction semble continue. Mais on observe une «cassure» (changement de pente) autour de 0, donc la fonction ne semble pas dérivable en 0.
2. Étudions la continuité de  $f$ .
  - La fonction  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . De même, la fonction  $x \mapsto 1 - x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$ . Finalement, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc a fortiori continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

- Reste à étudier la continuité en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x^2 = 1$$

Comme  $f$  admet une limite finie à droite et à gauche et que ces deux limites sont égales,  $f$  admet une limite en 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc  $f$  est continue en 0.

- Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. On a déjà vu que la fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Reste à étudier la dérivabilité en 0 via le **taux d'accroissement**. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \in \mathbb{R}$$

La fonction  $f$  admet une dérivée à droite et à gauche en 0, mais ces deux dérivées ne coïncident pas. Donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0. Finalement, la fonction  $f$  n'est dérivable que sur  $]0, +\infty[$ .

### 3 Dérivées successives

**Définition 3.1** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On définit les **dérivées successives** de  $f$  sur  $I$  par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \end{cases} \quad \text{à condition que } f^{(n)} \text{ existe}$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si la fonction  $f^{(n)}$  est bien définie, on l'appelle la **dérivée  $n$ -ième** de  $f$  ou la **dérivée d'ordre  $n$**  de  $f$ . On dit que  $f$  est  **$n$  fois dérivable** sur  $I$ .
- Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ , on dit que  $f$  est **indéfiniment dérivable** sur  $I$ .

**Définition 3.2** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

1. On dit que  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^1$**  sur  $I$  si  $f$  est dérivable sur  $I$  et que  $f'$  est continue sur  $I$ .
2. On dit que  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^2$**  sur  $I$  si  $f$  est 2 fois dérivable sur  $I$  et que  $f''$  est continue sur  $I$ .
3. On dit que  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^\infty$**  sur  $I$  si elle est  $n$  fois dérivable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 3.3** Les fonctions usuelles - polynomiales, exp, ln - sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de définition.

 Une fonction dérivable n'est pas forcément de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposition 3.4** Les combinaisons linéaires, produits, quotients, puissances, composées de fonctions  $n$  fois dérivables (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) sont  $n$  fois dérivables (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ).

 Pour montrer qu'une fonction est de **classe  $\mathcal{C}^1$**  sur  $I$ , il s'agit de montrer :

- qu'elle est bien définie et continue sur  $I$ ,
- qu'elle est dérivable sur  $I$  et calculer sa dérivée,
- et que sa dérivée est continue sur  $I$ .

**Exemple 3.5** Calculer les dérivées successives de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4.$$

- ① **Dans un premier temps, on justifie que la fonction est indéfiniment dérivable.** La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynomiale.
- ② **Dans un second temps, on calcule les dérivées successives.** De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = x^4, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f^{(3)}(x) = 24x, \quad f^{(4)}(x) = 24,$$

et pour tout  $n \geq 5$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = 0$ .

**Exemple 3.6** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer les dérivées successives de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}.$$

**GI** On doit trouver l'expression de  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : on calcule les premières dérivées, on conjecture une formule que l'on démontre par récurrence.

- ① **Dans un premier temps, on justifie que la fonction est indéfiniment dérivable.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Tout d'abord, la fonction  $x \mapsto ax$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynomiale. La fonction  $x \mapsto \exp(x)$  est également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (fonction usuelle). Par **composition**, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ② **Dans un second temps, on calcule les dérivées successives.** Commençons par calculer les premières dérivées pour pouvoir conjecturer une formule générale. On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = e^{ax}, \quad f'(x) = ae^{ax}, \quad f''(x) = a^2 e^{ax}, \quad \dots$$

Montrons par **récurrence** que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \gg.$$

– *Initialisation.* Montrons que la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = a^0 e^{ax}$$

Par convention,  $f^{(0)} = f$  et  $a^0 = 1$ . Or d'après l'énoncé, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{ax}$ . Donc, la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

– *Hérédité.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$$

On veut montrer que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = a^{n+1} e^{ax}$$

Par définition de la dérivée  $n+1$ -ième et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = a \times a^n e^{ax} = a^{n+1} e^{ax}.$$

Donc la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

– *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$$

**Exemple 3.7** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, 1[$  par

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .

**GI** *Fonction définie par morceaux : problème potentiel de continuité et dérivabilité à la jonction, c'est-à-dire en  $x = 0$ . De plus, comme elle est définie par morceaux, pour étudier la continuité et la dérivabilité, il faut faire les limites à droite et à gauche.*

- ① **Montrer que la fonction est bien définie et continue sur  $I$ .** La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est bien définie, continue et ne s'annule pas sur  $]0, 1[$ . La fonction  $x \mapsto x$  est continue sur  $]0, 1[$  en tant que fonction polynomiale. Donc, par passage à l'inverse et par produit, la fonction  $f$  est définie et continue sur  $]0, 1[$ . Il reste à étudier la continuité en 0. Par opérations sur les limites, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)} = 0 = f(0).$$

Donc la fonction  $f$  est continue en 0. Finalement, elle est continue sur  $I$ .

- ② **Montrer que la fonction est dérivable sur  $I$  et calculer sa dérivée.** La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est dérivable et ne s'annule pas sur  $]0, 1[$ . La fonction  $x \mapsto x$  est dérivable sur  $]0, 1[$  en tant que fonction polynomiale. Donc, par passage à l'inverse et par produit, la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Il reste à étudier la dérivabilité en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ . Finalement,  $f$  est dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- ③ **Montrer que la fonction dérivée est continue sur  $I$ .** Par opérations sur les fonctions continues, la dérivée  $f'$  est continue sur  $]0, 1[$ . Il reste à étudier la continuité en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} = 0 = f'(0).$$

Donc  $f'$  est continue en 0. Finalement  $f'$  est continue sur  $I$ .

- ④ En conclusion, on a montré que la fonction  $f$  était de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .

**Exemple 3.8** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x^2)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .



*Pour être plus efficace, on peut directement étudier la dérivabilité de la fonction sur le bon intervalle, ce qui impliquera la continuité de la fonction.*

- ① **Montrer que la fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .** La fonction  $x \mapsto x$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}^*$  et la fonction  $x \mapsto \exp(x^2) - 1$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit, par opérations, que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et donc continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Il reste à étudier la continuité en 0. On a, par dérivabilité en 0 de la fonction  $x \mapsto \exp(x^2)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) - 1}{x} = \frac{d}{dx} (\exp(x^2)) \Big|_{x=0} = (2x \exp(x^2)) \Big|_{x=0} = 0 = f(0).$$

Donc la fonction  $f$  est continue en 0. Finalement la fonction est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- ② **Montrer que la fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.** On a déjà montré que la fonction  $f$  était dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{2x \exp(x^2) \times x - (\exp(x^2) - 1) \times 1}{x^2} = 2 \exp(x^2) - \frac{\exp(x^2) - 1}{x^2}.$$

Il reste à étudier la dérivabilité en 0. Par dérivabilité en 0 de la fonction  $x \mapsto \exp(x)$ , il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  «suffisamment proche de 0», on a

$$\exp(x^2) = 1 + 0 \times x^2 + x^2 \varepsilon(x^2) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x^2) = 0.$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \varepsilon(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x^2) = 0 = f'(0).$$

Donc, la fonction est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ . Finalement,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2 \exp(x^2) - \frac{\exp(x^2)-1}{x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- ③ **Montrer que la fonction dérivée est continue sur  $\mathbb{R}$ .** Par opérations, la fonction dérivée  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Il reste à étudier la continuité en 0. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \exp(x^2) - \frac{\exp(x^2) - 1}{x^2} = 2 - 0 = 2 = f'(0).$$

Donc  $f'$  est continue en 0.

- En conclusion, on a montré que la fonction  $f$  était de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

### 4.1 Inégalité des accroissements finis

**Proposition 4.1 — Inégalité des accroissements finis, v1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On suppose que

- ① La fonction  $f$  est **dérivable** sur  $I$ .
- ② Il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in I$ , on a  $m \leq f'(x) \leq M$ .

Alors,

$$\forall (a, b) \in I^2, a < b, \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

**Proposition 4.2 — Inégalité des accroissements finis, v2.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On suppose que

- ① La fonction  $f$  est **dérivable** sur  $I$ .
- ② Il existe  $k \geq 0$  tel que pour tout  $x \in I$ , on a  $|f'(x)| \leq k$ .

Alors,

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$



Ce théorème quantifie le fait que si la **dérivée** d'une fonction est **bornée**, cela limite l'**amplitude** de ses **variations**.

**Exemple 4.3** Calculer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$



L'IAF permet d'encadrer la fonction. Puis, on conclut sur la valeur de la limite grâce au théorème des gendarmes. On a envie d'appliquer l'IAF avec  $f(u) = \exp\left(\frac{1}{u}\right)$ ,  $a = x$  et  $b = x+1$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \exp\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f'(u) = -\frac{1}{u^2} \exp\left(\frac{1}{u}\right)$$

En particulier, par décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$  et par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\forall u \in [x, x+1], \quad |f'(u)| = \frac{1}{u^2} \exp\left(\frac{1}{u}\right) \leq \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc, en appliquant l'**inégalité des accroissements finis**, on obtient que

$$|f(x+1) - f(x)| \leq \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)(x+1-x)$$

Finalement, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| (x+1) \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \times \exp(0) = 0.$$

Donc, par théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$



L'étude d'une **suite récurrente** est une application fréquente de l'**inégalité des accroissements finis**. Plus précisément, l'étude d'une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  se fait en général selon les étapes suivantes.

1. On trouve un intervalle  $I$  stable par  $f$  (c-à-d pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in I$ ).
2. Alors, si  $u_0 \in I$ , on montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ .
3. On trouve un point fixe de  $f$ , c'est-à-dire un réel  $\ell$  vérifiant  $f(\ell) = \ell$ .
4. On trouve un réel  $k \geq 0$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq k$ .
5. En appliquant l'IAF, on obtient que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ .
6. Par récurrence, on montre alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$ .
7. Si  $0 < k < 1$ , en laissant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité précédente, on en déduit que la suite converge vers  $\ell$ .

#### Exemple 4.4 — Étude d'une suite définie par récurrence à l'aide de l'IAF. (♥)

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : [-2, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x+2} \end{aligned}$$

On considère également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$  à déterminer grâce à la méthode précédente.

1. Montrons que l'intervalle  $[0, 2]$  est stable par  $f$ , c'est-à-dire que

$$\forall x \in [0, 2], \quad f(x) \in [0, 2]. \quad (\star)$$

Soit  $x \in [0, 2]$ . D'une part, par propriété de la racine carrée, on sait déjà que  $f(x) \geq 0$ . D'autre part, comme  $x \leq 2$ , par croissance de la fonction racine carrée sur  $[0, +\infty[$ ,  $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{2+2}$ , c'est-à-dire  $f(x) \leq 2$ .

2. Montrons par **récurrence** que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n \in [0, 2] \gg.$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 \in [0, 2].$$

D'après l'énoncé,  $u_0 = 0 \in [0, 2]$ . Et donc, la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

- *Hérédité.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n \in [0, 2]$$

On veut montrer que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \in [0, 2]$$

D'après l'énoncé, on sait que

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

De plus, d'après l'hypothèse de récurrence,  $u_n \in [0, 2]$ . Donc, en utilisant la propriété  $(\star)$ , on obtient que

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 2].$$

Donc la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 2].$$

3. Résolvons l'équation  $f(\ell) = \ell$  d'inconnue  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\ell = f(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \sqrt{2+\ell}.$$

On en déduit d'abord que nécessairement  $\ell \geq 0$ . Puis que,

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = -1 \quad \text{ou} \quad \ell = 2$$

Donc l'équation  $f(\ell) = \ell$  admet une unique solution donnée par  $\ell = 2$ .

4. Montrons que la dérivée de  $f$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -2, +\infty[$  et

$$\forall x \in ] -2, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Comme la dérivée est positive sur  $] -2, +\infty[$  et donc sur  $[0, +\infty[$ , déjà, on remarque que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Soit  $x \in [0, +\infty[$ . On a

$$x \geq 0 \quad \text{donc} \quad x+2 \geq 2.$$

Or la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  donc

$$\sqrt{x+2} \geq \sqrt{2}.$$

Donc, en multipliant cette inégalité par 2 et en utilisant le fait que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on obtient que

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Finalement, on a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

5. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|.$$

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction  $f$  car

- ① La fonction  $f$  est **dérivable** sur  $[0, +\infty[$ .
- ② Il existe  $k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \geq 0$  tel que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ , on a  $|f'(x)| \leq k$ .

Donc,

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[, \quad |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |b - a|.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En prenant  $b = u_n$  et  $a = 2$  dans l'inégalité précédente (car  $u_n$  et 2 appartiennent à  $[0, +\infty[$ ), comme  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(2) = 2$ , on obtient

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|.$$

6. Montrons par **récurrence** que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \ll |u_n - 2| \leq 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n \gg.$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - 2| \leq 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^0 = 2.$$

D'après l'énoncé,  $u_0 = 0$  donc  $|u_0 - 2| = 2 \leq 2$ . Et donc, la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

- *Hérédité.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - 2| \leq 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n$$

On veut montrer que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - 2| \leq 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{n+1}$$

D'après l'IAF, on sait que

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|.$$

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times |u_n - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n = 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{n+1}.$$

Donc la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 2| \leq 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n$$

7. Par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1.$$

Donc, par théorème des gendarmes, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

## 4.2 Monotonie des fonctions dérivables

**Proposition 4.5** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **dérivable** sur l'**intervalle**  $I$ .

1. La fonction  $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est nulle sur  $I$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est positive sur  $I$ .
3. La fonction  $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est négative sur  $I$ .

**Proposition 4.6** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **dérivable** sur l'**intervalle**  $I$ .

1. Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) > 0$  sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
2. Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) < 0$  sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .



Il est indispensable pour appliquer ce résultat de travailler sur un **intervalle**. En effet, si l'on considère par exemple la fonction inverse, elle est définie et dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$  et sa dérivée est strictement négative sur  $\mathbb{R}^*$ . Cependant, la fonction inverse n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$  (en effet,  $-1 < 1$  et  $f(-1) < f(1)$ ). La fonction inverse est seulement décroissante sur les intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ .

**Exemple 4.7** On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x}{1+x} \end{aligned}$$

Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ . En déduire l'allure de la courbe de  $f$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et

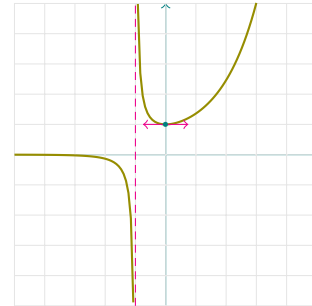
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

|         |           |           |                     |           |
|---------|-----------|-----------|---------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $0$                 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       |           | $- \quad 0 \quad +$ |           |
| $f$     | $0$       | $+\infty$ | $1$                 | $+\infty$ |

Pour représenter l'allure de la courbe, on peut placer les points suivants :

- Le taux d'accroissement diverge vers  $\pm\infty$  en  $(-1)^\pm$ . Donc, la fonction admet une asymptote verticale  $-1$ .
- La dérivée s'annule en 0, donc la fonction admet une tangente horizontale en  $x = 0$ .
- La fonction vaut 1 en 0.
- La fonction est strictement décroissante sur  $] -\infty, -1[$  et tend vers 0, elle admet une asymptote verticale  $y = 0$  en  $-\infty$ .



### 4.3 Conséquence sur les extrema locaux

**Définition 4.8** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  un point de  $I$ .

- On dit que  $f(a)$  est un **maximum local** de  $f$  lorsque la fonction  $f$  est majorée par  $f(a)$  **au voisinage de  $a$** . Autrement dit,

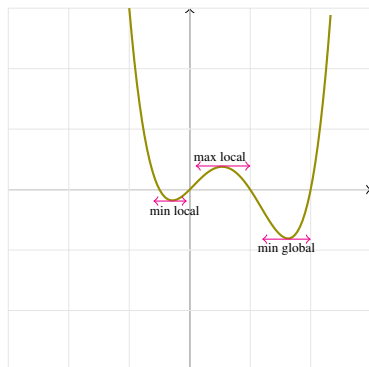
$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta, f(x) \leq f(a).$$

- On dit que  $f(a)$  est un **minimum local** de  $f$  lorsque la fonction  $f$  est minorée par  $f(a)$  **au voisinage de  $a$** . Autrement dit,

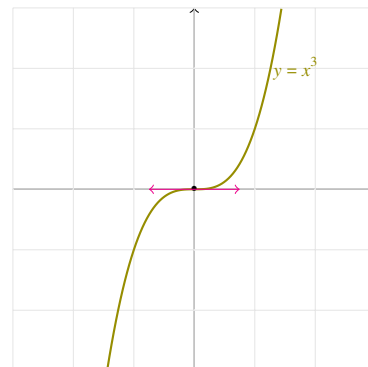
$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta, f(x) \geq f(a).$$

! On dit que  $f(a)$  est un **maximum global** de  $f$  lorsque la fonction  $f$  est majorée par  $f(a)$  sur tout l'intervalle  $I$  entier. Autrement dit,  $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$ .

**Proposition 4.9** Soient  $f$  une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert**  $I$  et  $a$  un point de  $I$ . On a :  
 $f$  admet un extremum local en  $a \iff f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$



La dérivée de la fonction représentée s'annule trois fois et y change de signe à chaque fois : elle admet trois extrema.



La dérivée de la fonction cube s'annule en 0 mais elle ne change pas de signe : la fonction n'admet pas d'extrema en 0.

?

Souvent pour trouver des extrema locaux, on peut procéder de la manière suivante.

1. On cherche les points d'annulation de la dérivée. Cela donne des candidats pour les extrema.
2. On regarde pour chacun des candidats si la dérivée change de signe au voisinage de ce point pour déterminer s'il s'agit d'un extremum.

3. On peut ensuite regarder si les extrémités de l'intervalle (si elles appartiennent à l'intervalle) correspondent ou non à des extrema locaux.

**Exemple 4.10** On considère la fonction

$$f : \left[-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^3 \left(1 - \frac{3}{5}x^2\right).$$

Déterminer les extrema de la fonction  $f$  sur  $I = \left[-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ .

1. La fonction  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $I$  en tant que fonction polynomiale. De plus,

$$\forall x \in I, f'(x) = 3x^2(1-x)(1+x).$$

Donc, l'équation  $f'(x) = 0$  admet exactement trois solutions sur  $I$  données par  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $x = -1$ . Si la fonction  $f$  admet des extrema locaux sur  $I$ , c'est nécessairement en un de ces trois points.

2. Pour déterminer si les candidats sont des extrema ou pas, il faut regarder si la dérivée change de signe au voisinage de ces points là. Pour cela, on peut tracer le tableau de variations de la fonction  $f$ .

| $x$     | $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ | $-1$           | $0$ | $1$           | $+\infty$ |
|---------|------------------------------|----------------|-----|---------------|-----------|
| $f'(x)$ | $-$                          | $0$            | $+$ | $0$           | $-$       |
| $f$     | $0$                          | $-\frac{2}{3}$ | $0$ | $\frac{2}{3}$ | $-\infty$ |

On en déduit que :

- $-1$  est un minimum local (mais pas global car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ )
  - $0$  n'est pas un extremum (car la dérivée ne change pas de signe autour de  $x = 0$ )
  - $1$  est un maximum global.
3. Enfin, on peut regarder les extrémités de l'intervalle. On observe que  $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$  est un maximum local (mais pas global).