TD 17 – Variables Aléatoires Finies

Savoir déterminer une loi

Exercice 1 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux dés et X la variable aléatoire donnant la plus grande valeur obtenue parmi les deux dés. Donner les lois de S et de X.

Exercice 2 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

Exercice 3 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement avec remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

Exercice 4 – Un joueur mise 1 euro sur un entier entre 1 et 6 puis il jette deux dés.

- Si l'entier choisi sort une fois, le joueur gagne deux euros.
- Si l'entier choisi sort deux fois, le joueur gagne trois euros.
- Si l'entier choisi ne sort à aucun des deux lancers, le joueur perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (en comptant sa mise initiale). Déterminer la loi de X.

Exercice 5 – On considère une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées 1 à n. On effectue une succession de $n+1$ tirages avec remise. On note, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage et on note X la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient pas de 1 et sinon, égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un 1.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, la loi de N_k.
2. Déterminer la loi de X.
3. Vérifier que
$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

Exercice 6 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Vérifier que
$$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$$

Espérance et variance

Exercice 7 – Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. Que vaut $\mathbb{P}(X < -1)$?
2. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$?
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance de X.

5. Déterminer la loi de $Y = |X-1|$.

Exercice 8 – Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

k	-1	0	1
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Déterminer l'espérance de $Y = X^2+3$ de deux façons différentes :
1. en déterminant la loi de Y;
2. en appliquant le théorème de transfert.

Exercice 9 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
1. Déterminer la loi de X (cf Exercice 2).
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la variance de X.

Exercice 10 – On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.
1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de Y.
3. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 11 – On considère un jeu de 32 cartes traditionnel et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirées sont de même valeur, on dit qu'il y a "bataille" et on pose $B=1$, dans le cas contraire, on pose $B=0$. Donner la loi de B. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 12 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de X.

Exercice 13 – On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 14 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.
1. Donner $Y(\Omega)$.
2. Soient $i \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k])$.
3. En déduire la loi de Y. *On pourra utiliser la formule des probabilités totales.*
4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 15 – Edhec 2018, Maths S. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0,1,\ldots,n$. Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0=0$).
1. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n possède une espérance et une variance à déterminer.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ sont mutuellement indépendantes.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[Y=n]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   (b) En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Y=n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Type Concours

Exercice 16 – Ecricome 2018, Maths S. Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Montrer que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z=k-1).$$

Exercice 17 – Edhec 2006, Maths S. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$ il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité

$$\frac{k+1}{k+2}$$

ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité

$$\frac{1}{k+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (ainsi $X_0 = 0$).

1. Donner la loi de X_1.
2. On admet que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \ \ P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$$

Exercice 18 – Ecricome 2023, Maths E. Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un second tirage d'une boule dans la seconde urne. Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$.
   (a) On suppose que l'évènement $[X = k]$ est réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j. *On distinguera les cas $j \leqslant k$ ou $j \geqslant k+1$.*
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

   (b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,

$$P(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que

$$E(Y) = \frac{n+2}{3}$$

Exercice 19 – On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune $N \geqslant 3$ boules indiscernables au toucher.

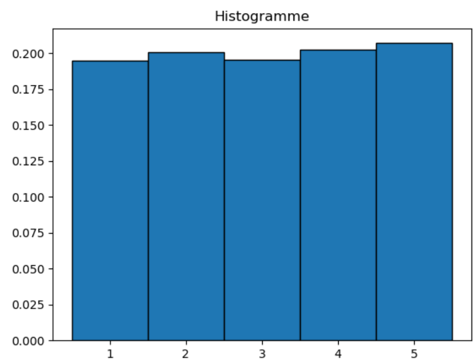
- L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
- L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie 1 : Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
2. On simule la réalisation de 10000 répétitions de cette expérience aléatoire, et on obtient ceci :



   Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

3. On se place, pour cette question seulement, dans le cas $N = 5$. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

4. Soit $k \in [\![1, N]\!]$.
   (a) Déterminer, pour tout $i \in [\![2, k-1]\!]$,
   $$P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}}(B_i)$$
   (b) Déterminer
   $$P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k)$$
5. Grâce à la formule des probabilités composées, en déduire la loi de la variable aléatoire X.
6. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Partie 2 : Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note aussi :

- U_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- U_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

7. Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y.
8. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:
$$P_{U_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$
9. Calculer $P_{U_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$. *(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).*
10. Montrer que :
$$\forall j \in [\![1, N]\!], \qquad P(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
11. Calculer l'espérance de Y.