Une société de location de vélos possède trois magasins, un à Rosnoën, un à Landerneau et un à Miliza. Lorsqu'un(e) client(e) loue un vélo, un jour donné, dans une des trois villes, il/elle le restitue le lendemain dans un des trois magasins, puis un autre client reprend le vélo et ainsi de suite. Une étude statistique a permis de montrer que, pour un vélo donné :

- s'il est loué à Rosnoën un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{3}{4}$,
- s'il est loué à Landerneau un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et à ramené à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- s'il est loué à Milizca, il est laissé à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissé à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n, on note

R_n : "Le vélo se trouve à Rosnoën le n-ième jour"	et	$r_n = P(R_n)$
L_n : "Le vélo se trouve à Landerneau le n-ième jour"	et	$\ell_n = P(L_n)$
M_n : "Le vélo se trouve à Milizac le n-ième jour"	et	$m_n = P(M_n)$

On suppose qu'au départ, le jour 0, le vélo est à Rosnoën.

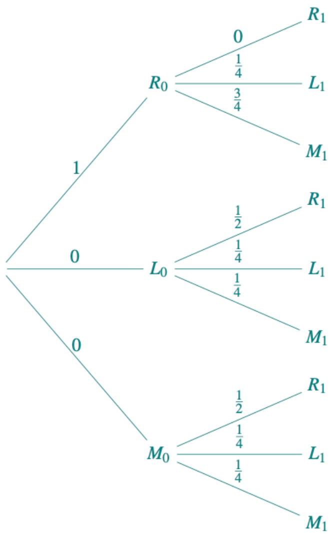
1. (a) Donner r_0, ℓ_0 et m_0.

Au jour 0, le vélo se situe toujours à Rosnoën, donc nécessairement,

$$\boxed{r_0 = 1, \qquad \ell_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad m_0 = 0.}$$

(b) Tracer l'arbre des probabilités correspondant à ce qu'il se passe le jour 0 et le jour 1.

En utilisant les données du texte, on obtient l'arbre suivant pour les jours 0 et 1.



(c) Calculer r_1 et ℓ_1 et m_1.

Comme le système (R_0, L_0, M_0) est un système complet d'évènements (le jour 0 le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

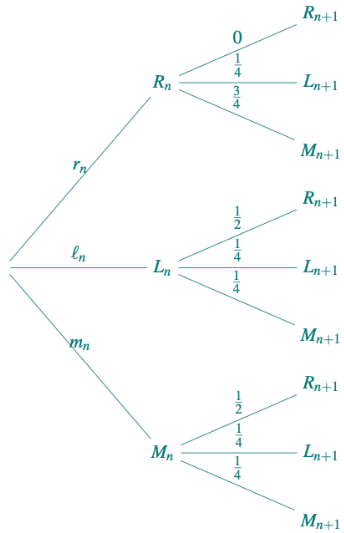
$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(R_0)P_{R_0}(R_1) + P(L_0)P_{L_0}(R_1) + P(M_0)P_{M_0}(R_1) \\ &= 1 \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{r_1 = 0.}$ De la même manière, on obtient que

$$\boxed{\ell_1 = \tfrac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad m_1 = \tfrac{3}{4}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Recopier l'arbre de probabilités ci-dessous et rajouter les probabilités correspondantes sur les différentes branches.

En utilisant les données du texte, on obtient,



(b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme le système (R_n, L_n, M_n) est un système complet d'évènements (le jour n le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned} P(R_{n+1}) &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(R_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times 0 + \ell_n \times \frac{1}{2} + m_n \times 12 \end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\boxed{r_{n+1} = \tfrac{1}{2}\ell_n + \tfrac{1}{2}m_n.}$$

(c) Déterminer une relation analogue entre ℓ_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. De manière analogue, comme le système (R_n, L_n, M_n) est un système complet d'évènements (le jour n le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}\ell_{n+1} &= P(R_n)P_{R_n}(L_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(L_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(L_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + m_n \times 14 \\ &= \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n.\end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\boxed{\ell_{n+1} = \tfrac{1}{4}r_n + \tfrac{1}{4}\ell_n + \tfrac{1}{4}m_n.}$$

(d) Déterminer une relation analogue entre m_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.

De la même manière, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m_{n+1} = \tfrac{3}{4}r_n + \tfrac{1}{4}\ell_n + \tfrac{1}{4}m_n.}$$

3. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation

$$U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$

(a) Donner U_0.

En utilisant la question 1(a), on a

$$\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), on a

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \ell_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n \\ \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n \\ \frac{3}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix} = AU_n,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Démontrer alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$

Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $U_n = A^n U_0$ » est vraie.

- *Initialisation* : Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_0 = A^0 U_0$. Par convention $A^0 = I_3$. Donc, on a bien $U_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_n = A^n U_0$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_{n+1} = A^{n+1}U_0$. Par construction (cf. question 3(b)),
$$U_{n+1} = AU_n.$$
Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$U_{n+1} = AU_n = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0.$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : Donc, par principe de récurrence, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.}$$

4. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

Soient

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\begin{aligned}
PX = B \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & & & = & \alpha \\ 3x & & & + & z & = & \beta \\ 5x & - & y & - & z & = & \gamma \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 4x & + & y & & & = & \alpha & \\ & - & \frac{3}{4}y & + & z & = & \beta - \frac{3}{4}\alpha & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4}L_1 \\ & - & \frac{9}{4}y & - & z & = & \gamma - \frac{5}{4}\alpha & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4}L_1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 4x & - & y & & & = & \alpha & \\ & - & \frac{4}{3}y & + & z & = & \beta - \frac{4}{3} & \\ & & & - & 4z & = & \alpha - 3\beta + \gamma & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & & & = & \alpha \\ & - & \frac{4}{3}y & + & z & = & \beta - \frac{4}{3} \\ & & & & z & = & -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & y & = & \alpha \\ & & y & = & \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ & & z & = & -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \\ y & = & \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ z & = & -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{l'équation } PX = B \text{ admet une unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On en déduit que P est inversible et que

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}.}$$

(b) On note $D=P^{-1}AP$. Montrer que $A=PDP^{-1}$.

Comme P est inversible, on peut multiplier la relation $D=P^{-1}AP$ à gauche par la matrice P pour obtenir,

$$PD=PP^{-1}AP=AP,$$

car $PP^{-1}=I_3$. De même, en multipliant par P^{-1} la relation précédente, on obtient

$$\boxed{PDP^{-1}=A.}$$

(c) Montrer que D est une matrice diagonale.

En effectuant deux produits matriciels, on a

$$\begin{aligned}\boxed{D}&=P^{-1}AP\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -\frac{1}{2} & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 5 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\ &\boxed{=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(d) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de D^n.

En utilisant l'expression de D donnée à la question 4(c), par une récurrence immédiate, on obtient que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad D^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

(e) Montrer par récurrence que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad A^n=PD^nP^{-1}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n):\text{« } A^n=PD^nP^{-1}\text{ »}$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $A^0=PD^0P^{-1}$. D'une part $A^0=I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que

$$A^n=PD^nP^{-1}.$$

Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$A^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}.$$

D'après la question 4(b), on a $A=PDP^{-1}$, donc,

$$A^{n+1}=A^n\times A=A^nPDP^{-1}.$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$A^{n+1}=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^nI_3DP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=PD^nP^{-1}.}$$

(f) En déduire que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. À l'aide des questions 4(d) et 4(e), on obtient

$$\begin{aligned}\boxed{A^n}&=PD^nP^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12}\\ \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\boxed{=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(g) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de U_n.

Soit $n\in\mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 3(c), l'expression de U_0 donnée à la question 3(a) et l'expression de A^n donnée à la question 4(f), on obtient que

$$U_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{U_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{1}{4}\\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}}$$

5. (a) Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, r_n, ℓ_n et m_n en fonction de n.

Soit $n\in\mathbb{N}$. En utilisant la question 4(g), et par définition du vecteur U_n, on a

$$\boxed{r_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n,\qquad \ell_n=\frac{1}{4}\qquad\text{et}\qquad m_n=\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(b) Vérifier que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad r_n+\ell_n+m_n=1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$\begin{aligned}\boxed{r_n+\ell_n+m_n} &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12} \\ &\boxed{=1}\end{aligned}$$

(c) Déterminer les limites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par propriété sur les suites géométriques,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0 \qquad \text{car} \qquad -1<-\frac{1}{2}<1.$$

Donc, en utilisant les expressions des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvées à la question 5(a), on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n=\frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} m_n=\frac{5}{12}.}$$

Et, comme $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, on a directement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n=\frac{1}{4}.}$$

6. (a) Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour ?

On cherche à calculer $P_{L_2}(M_1)$. Par la **formule de Bayes**, on a

$$P_{L_2}(M_1)=\frac{P(M_1)P_{M_1}(L_2)}{P(L_2)}.$$

Or d'après l'énoncé,

$$P_{M_1}(L_2)=\frac{1}{4}.$$

Puis, en utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$P(M_1)=m_1=\frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad P(L_2)=\ell_2=\frac{1}{4}.$$

Finalement, on a On cherche à calculer $P_{L_2}(M_1)$. Par la **formule de Bayes**, on a

$$P_{L_2}(M_1)=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}.$$

Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour est de $\boxed{\frac{3}{4}.}$

(b) Le fait que le vélo se trouve à Landerneau le premier jour est-il indépendant du fait qu'il se trouve à Milizac le deuxième jour ?

On se demande si $P(M_2)=P_{L_1}(M_2)$. Pour cela, on va calculer les deux probabilités.
D'une part, d'après l'énoncé,

$$P_{L_1}(M_2)=\frac{1}{4}.$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$P(M_2)=m_2=\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Comme $P(M_2)=P_{L_1}(M_2)$, $\boxed{\text{les deux évènements sont indépendants.}}$