TD 20 – Séries numériques

Exercice 1 – Étude à la main d'une série (★★☆). On considère la série $\sum u_k$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{e^{-k}+e^k}$.

1. Déterminer la monotonie de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_k \leqslant e^{-k}$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de S_n.
4. En déduire que la série $\sum u_k$ est convergente. On note S sa somme.
5. Montrer que
$$S \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

Exercice 2 – Série télescopique (★☆☆). Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$?
2. Pour tout $n \geqslant 2$, transformer l'expression de u_n pour faire apparaître un télescopage.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ est divergente.

Exercice 3 – Série télescopique (★☆☆). Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$?
2. Pour tout $n \geqslant 3$, transformer l'expression de u_n pour faire apparaître un télescopage.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 3} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Exercice 4 – Série télescopique (★★☆). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de S_n, la somme partielle d'ordre n, en fonction n en utilisant des télescopages.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Exercice 5 – Convergence et Somme (★☆☆). Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

1. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (-2)^k$	6. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}$	11. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}}$
2. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$	7. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-2)^k}{k!}$	12. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}}$
3. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}$	8. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-3)^{k-1}}{k!}$	13. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{k+3}{4^k}$
4. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{5^k}$	9. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$	14. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k}$
5. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k$	10. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{(-2)^k}$	15. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{3^{k+1}}$

Exercice 6 – Convergence et Somme (★★☆). Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

1. $\sum\limits_{k\geqslant m} q^k$, $q\in]-1,1[$, $m\in\mathbb{N}$
2. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} q^{2k}$, $q\in]-1,1[$
3. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k2^k}{k!}$
4. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2}{3^k}$
5. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{k!}$
6. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{(k+1)!}$
7. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k(k+1)}{(k+1)!}$
8. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2 2^k}{k!}$
9. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 7 – Comparaison pour les séries à termes positifs. Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum\limits_{k\geqslant 3} \dfrac{1}{k^2\ln(k)}$
2. $\sum\limits_{k\geqslant 3} \dfrac{\ln(k)}{k}$
3. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$

Exercice 8 – Convergence absolue. Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}$
2. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^k \mathrm{e}^{-k}}{k^2}$

Exercice 9 – Convergence et Somme (★★★). Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

1. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{k^2}{(k+1)!}$
2. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{k^3}{k!}$

Exercice 10 – (★★★). Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$
2. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$
3. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k^2-1}$

Exercice 11 – Étude abstraite d'une série (★★★). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in]0,1[$ et,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=u_n-u_n^2.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in]0,1[$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. Montrer que la série suivante converge et déterminer sa somme
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^2.$$
5. Montrer que la série suivante diverge
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$

Exercice 12 – Étude abstraite d'une série (★★★). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0>0$ et,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=\mathrm{e}^{-u_n}u_n.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\ln(u_n)$. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n$ en fonction de u_n.
5. En déduire la nature de la série $\sum u_k$.