DS 5

Vendredi 9 février, de 13h30 à 17h30

• Partie 1 - Des questions comme en cours et en TD

Les questions qui suivent sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre souhaité.

1. Montrer que la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}$ est ni paire ni impaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

On calcule que

$$f(1) = 4 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = 0.$$

- Comme $f(1) \neq f(-1)$, la fonction f n'est pas paire.
- Comme $f(1) \neq -f(-1)$, la fonction f n'est pas impaire.

2. Calculer le coefficient binomial suivant

$$\binom{10}{3}.$$

En utilisant la définition d'un coefficient binomial avec des factorielles, on a

$$\boxed{\tbinom{10}{3}} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 \boxed{= 120}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression suivante :

$$(x-1)^7.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide du binôme de Newton, on a

$$(x-1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k (-1)^{7-k}.$$

En calculant tous les coefficients binomiaux, par exemple à l'aide d'un triangle de Pascal, on a

$$\begin{aligned}(x-2)^7 = {} & 1 \times x^0 \times (-1)^7 + 7 \times x^1 \times (-1)^6 + 21 \times x^2 \times (-1)^5 + 35 \times x^3 \times (-1)^4 \\ & + 35 \times x^4 \times (-1)^3 + 21 \times x^5 \times (-1)^2 + 7 \times x^6 \times (-1)^1 + 1 \times x^7 \times (-1)^0\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1}$$

4. Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement.

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x+1) - \ln(x+2)$ ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}$ iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

i) GI *Forme indéterminée $+\infty - \infty$*

En utilisant les propriétés algébriques du logarithme, on a, pour tout $x > -2$,

$$2\ln(x+1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x^2+2x+1}{x+2}\right) = \ln\left(x \times \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}\right)$$

Or, par opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x \times \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty.$$

Donc, par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x+1)-\ln(x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x \times \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right) \boxed{=+\infty}$$

ii) GI *Forme indéterminée* $0/0$

On a, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+3}{x-1}$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} \tfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}} = \lim_{x\to1^-} \frac{x+3}{x-1} \boxed{=-\infty}$$

iii) GI *Forme indéterminée* ∞/∞

On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \boxed{=1}$$

5. Une usine fabrique des tubes. Des erreurs de réglage dans la chaîne de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes. Une étude menée sur la production a permis de constater que
   - 96% des tubes ont une épaisseur conforme.
   - Parmi les tubes qui ont une épaisseur conforme, 95% ont une longueur conforme.
   - $3,6\%$ des tubes ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

   On choisit un tube au hasard dans la production et on considère les évènements E "l'épaisseur du tube est conforme" et L "la longueur du tube est conforme"'.

   GI *L'énoncé nous donne les informations suivantes :*

$$P(E) = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}, \qquad P_E(L) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}, \qquad P(\overline{E}\cap L) = \frac{3,6}{100} = \frac{9}{250}$$

(a) Calculer $P_{\overline{E}}(L)$.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{\overline{E}}(L) = \frac{P(\overline{E}\cap L)}{P(\overline{E})}.$$

Or, en utilisant les informations de l'énoncé, on a

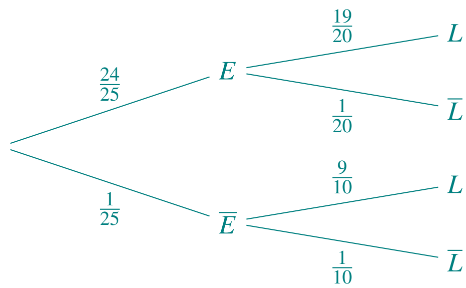
$$P(\overline{E}\cap L) = \frac{3,6}{100} = \frac{9}{250} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{E}) = 1-P(E) = 1-\frac{24}{25} = \frac{1}{25}.$$

Donc, finalement, on obtient

$$\boxed{P_{\overline{E}}(L)} = \frac{\frac{9}{250}}{\frac{1}{25}} = \frac{9}{250}\times\frac{25}{1} \boxed{=\tfrac{9}{10}}$$

(b) En déduire $P(L)$. *On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*

Finalement, à l'aide de la question précédente, la situation peut être représentée par l'arbre de probabilité suivant.



Comme la famille $(E,\overline{E})$ est un système complet d'évènements (car soit le tube a une épaisseur conforme, soit non), en appliquant la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}\boxed{P(L)} &= P(E)P_E(L)+P(\overline{E})P_{\overline{E}}(L)\\ &= \frac{24}{25}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{25}\times\frac{9}{10}\\ &= \frac{12\times 19+9}{25\times 10}\\ &\boxed{= \frac{237}{250}}\end{aligned}$$

6. Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans vous soucier du domaine de définition/dérivabilité.

$$\text{i) } f(x)=\frac{1}{2x^4} \qquad \text{ii) } g(x)=(\exp(x))^2 \qquad \text{iii) } h(x)=\frac{x^3+2}{x^2+1}$$

i) On a

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad \boxed{f'(x)} = \frac{1}{2}\times -\frac{4}{x^5}\ \boxed{= -\frac{2}{x^5}}$$

ii) On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \boxed{g'(x)} = 2\exp(x)\exp(x)\ \boxed{= 2\exp(2x).}$$

iii) On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \boxed{h'(x)} = \frac{3x^2(x^2+1)-(x^3+2)(2x)}{(x^2+1)^2}\ \boxed{= \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}}$$

7. On considère la fonction f, définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\qquad f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

GI *On voit une fraction, on doit s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas !*

(a) Donner le domaine de définition de la fonction f.

On a,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad x^2+1\neq 0.$$

Donc la fonction f est définie sur $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}.}$

(b) Étudier la parité de la fonction f.

Le domaine de définition de f, donné par $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à zéro donc on peut étudier la parité de f. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$f(-x)=\frac{(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x).$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$

(c) Déterminer la dérivée de la fonction f.

On a,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{f'(x)} = \frac{1 \times (x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \boxed{= \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}}$$

(d) Dresser son tableau de variations de la fonction f (limites comprises).

Grâce à la question précédente, on peut tracer le tableau de signe de f', puis en déduire le tableau de variations de f. De plus, on peut rajouter les valeurs suivantes dans le tableau de variations :

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f(1) = \frac{1}{2},$$

et les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

et de même,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

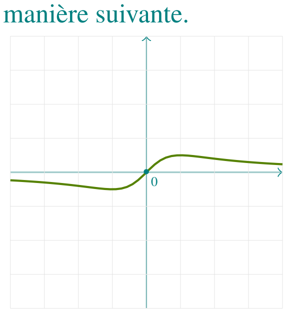
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

(e) La fonction f admet-elle un maximum ? minimum ?

D'après le tableau de variations, la fonction f admet un $\boxed{\text{maximum qui vaut } \frac{1}{2}}$ et qui est atteint en $x = 1$ et elle admet un $\boxed{\text{minimum qui vaut } -\frac{1}{2}}$ et qui est atteint en $x = -1$.

(f) Représenter l'allure de sa courbe.

Avec les informations récoltées aux questions précédentes, on représente l'allure de la courbe de la fonction f de la manière suivante.



8. Étudier la continuité des deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ car la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $]0,+\infty[$. La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ en tant que fonction polynomiale. Finalement, il reste à étudier la continuité en 0. D'une part, $f(0)=0+1=1$. D'autre part,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1$$
Comme les limites en 0 à droite et à gauche sont égales, la fonction f admet une limite en 0 donnée par
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0).$$
Donc la fonction f est continue en 0. Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g est continue sur $]1,+\infty[$ car la fonction logarithme est continue sur $]0,+\infty[$ donc a fortiori sur $]1,+\infty[$. La fonction g est continue sur $]-\infty,1[$ en tant que fonction polynomiale. Finalement, il reste à étudier la continuité en 1. D'une part, $g(1)=1^2=1$. D'autre part,
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x) = \ln(1) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1^2 = 1.$$
Comme les limites en 1 à droite et à gauche ne sont pas égales, la fonction g n'admet pas de limite en 1 et donc a fortiori n'est pas continue en 1. Finalement, la fonction g est uniquement continue sur $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

9. On considère la fonction f définie par
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{x}.$$
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[2,3]$.

On voit une fraction, on doit s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas ! Et on voit une racine, on doit s'assure que le terme sous la racine est positif !

On va appliquer le théorème de la bijection à la fonction g.

① La fonction f est définie sur l'intervalle $[2,3]$.

② La fonction f est continue sur $[2,3]$.

③ Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $[2,3]$.
- La fonction est dérivable sur $[2,3]$ car la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la fonction $x\mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} \geqslant 0.$$
- L'équation $f'(x)=0$ admet aucune solution.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[2,3]$ sur $[f(2),f(3)] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\right]$. Autrement dit,
$$\forall y \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\right], \ \exists! x\in[2,3], \ y=f(x).$$
Or, comme $1<\sqrt{2}<2$ et $1<\sqrt{3}<2$, on a
$$\frac{\sqrt{2}}{2}-1 < \frac{2}{2}-1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3} > \frac{1}{2}-\frac{2}{3} = \frac{1}{6} > 0.$$
Donc
$$0 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}-1, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\right].$$
Donc il existe $x\in[2,3]$ tel que $g(x)=0$.

• Partie 2 - Fonctions & Suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \tag{$\bullet$}$$

où f est la fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{3x-1}{x+1}.$$

On voit une fraction, on doit s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas !

1. (a) Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

   Pour tout $x \neq -1$, $x+1 \neq 0$. Donc la fonction f est définie sur $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}.}$

   (b) Étudier les variations de f.

   Tout d'abord, la fonction est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (car $x \mapsto 3x-1$ et $x \mapsto x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x+1$ ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_f$) et

   $$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f'(x) = \frac{3(x+1)-(3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

   Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,-1[\text{ et sur }]-1,+\infty[}$ (attention, on ne dit pas que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ car on ne parle de monotonie que sur un intervalle).

   (c) En déduire que,

   $$\forall x \geqslant 1, \qquad f(x) \geqslant 1.$$

   Comme f est croissante sur $]-1,+\infty[$,

   $$\boxed{\forall x \geqslant 1, \qquad f(x) \geqslant f(1) = 1.}$$

   (d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.

   Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a

   $$f(x) - x = \frac{3x-1}{x+1} - x = \frac{3x-1-x(x+1)}{x+1} = \frac{-x^2+2x-1}{x+1} = -\frac{(x-1)^2}{x+1}.$$

   On en déduit le tableau de signe suivant pour la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-(x-1)^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	‖	$-$	0	$-$	

   (e) Résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$.

   D'après le tableau de signe de la question précédente, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule que en $x = 1$. Donc l'équation $f(\ell) = \ell$ admet $\boxed{\text{une unique solution donnée par } \ell = 1.}$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

   Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$u_n \geqslant 1$" est vraie.

- *Initialisation :* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \geqslant 1$. D'après l'énoncé, on sait que $u_0 = 2$. Donc $u_0 \geqslant 1$ et la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'énoncé,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

  Or, par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \geqslant 1$. Donc en utilisant la question 1(c), on en déduit que

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 1.$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion :* Finalement, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 1.}$$

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation de récurrence, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Or, d'après la question 2(a), $u_n \geqslant 1$ et d'après la question 1(d), pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) - x \leqslant 1$. On en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

D'après les questions 2(a) et 2(b), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 1) et décroissante. Donc, par le **théorème de la limite monotone**, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell.}$

(d) Grâce à la relation (•), déterminer la valeur de ℓ.

D'après la question 2(c), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Donc, en passant à la limite dans l'inégalité de la question 2(a), on sait que $\ell \geqslant 1$. De plus, d'après la relation de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

Or, à fortiori, la suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. De plus, par continuité de la fonction f sur $\mathscr{D}_f$, on sait que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(\ell)$ (car $\ell \neq -1$). Donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient que

$$\ell = f(\ell).$$

Or, d'après la question 1(e), l'équation $f(\ell) = \ell$ admet une unique solution donnée par $\ell = 1$. Donc, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

3. En langage Python,

(a) écrire un programme qui définit la fonction f, c'est-à-dire qui prend en argument un réel `x` et qui renvoie la valeur de `f(x)`;

On utilise la syntaxe pour le définition de fonction (`def` et `return`).

```
def f(x):
        return (3*x-1)/(x+1)
```

(b) écrire un programme qui représente la fonction f sur l'intervalle $[1, 10]$;

On importe `matplotlib.pyplot` pour la représentation et `numpy` pour créer la liste des abscisses avec `linspace` et à partir de la liste des abscisses, on créée la liste des ordonnées de la fonction f.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np. linspace (1 ,10 ,100)
y=f(x)
plt .plot(x,y)
plt .show ()
```

(c) écrire un programme qui calcule les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

On calcule les termes de la suite de manière récursive.

```python
u = 2
for k in range(1, 100):
        u = f(u)
        print(u)
```

(d) écrire un programme qui détermine le rang du premier terme de la suite tel que $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$.

On calcule les termes de la suite de manière récursive jusqu'à atteindre la condition demandée, c'est-à-dire tant que $|u_n - 1| > 10^{-3}$ et on créée une variable n qui contient le rang actuel du terme de la suite que l'on calcule.

```python
u = 2
n = 0
while |u -1| > 10**-3:
        u = f(u)
        n = n+1
print(n)
```

• Partie 3 - Probabilités

Une société de location de vélos possède trois magasins, un à Rosnoën, un à Landerneau et un à Miliza. Lorsqu'un(e) client(e) loue un vélo, un jour donné, dans une des trois villes, il/elle le restitue le lendemain dans un des trois magasins, puis un autre client reprend le vélo et ainsi de suite. Une étude statistique a permis de montrer que, pour un vélo donné :

- s'il est loué à Rosnoën un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{3}{4}$,
- s'il est loué à Landerneau un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et à ramené à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- s'il est loué à Milizca, il est laissé à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissé à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n, on note

R_n : "Le vélo se trouve à Rosnoën le n-ième jour"	et	$r_n = P(R_n)$
L_n : "Le vélo se trouve à Landerneau le n-ième jour"	et	$\ell_n = P(L_n)$
M_n : "Le vélo se trouve à Milizac le n-ième jour"	et	$m_n = P(M_n)$

On suppose qu'au départ, le jour 0, le vélo est à Rosnoën.

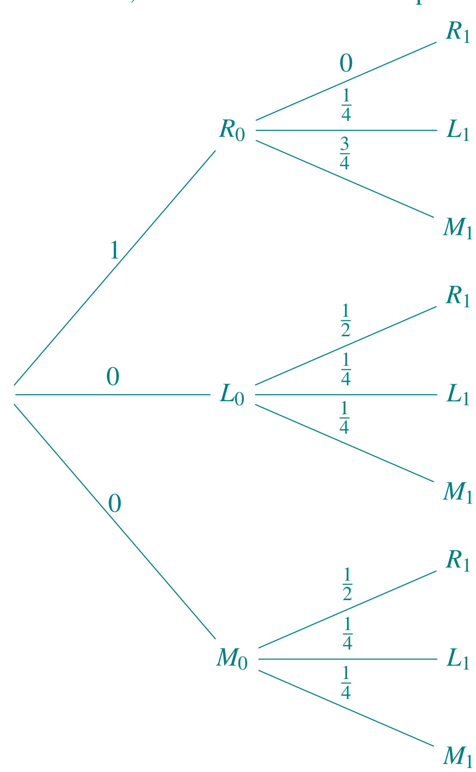
1. (a) Donner r_0, ℓ_0 et m_0.

Au jour 0, le vélo se situe toujours à Rosnoën, donc nécessairement,

$$\boxed{r_0 = 1, \qquad \ell_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad m_0 = 0.}$$

(b) Tracer l'arbre des probabilités correspondant à ce qu'il se passe le jour 0 et le jour 1.

En utilisant les données du texte, on obtient l'arbre suivant pour les jours 0 et 1.



(c) Calculer r_1 et ℓ_1 et m_1.

Comme le système (R_0, L_0, M_0) est un système complet d'évènements (le jour 0 le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des**

probabilités totales, on a

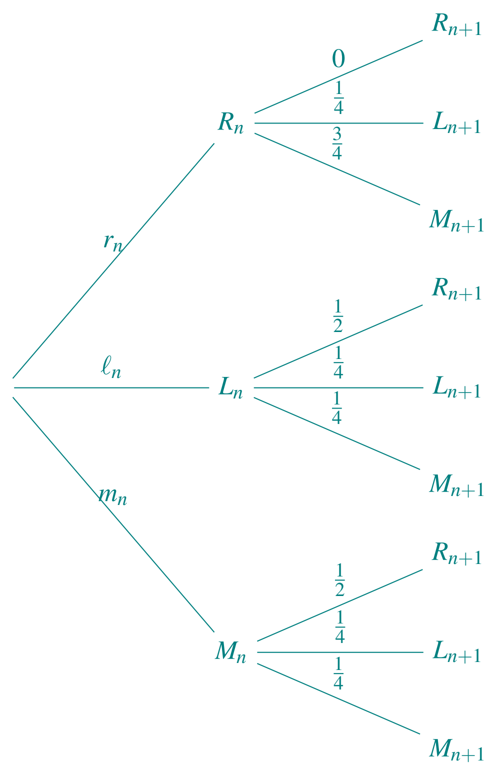
$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(R_0)P_{R_0}(R_1) + P(L_0)P_{L_0}(R_1) + P(M_0)P_{M_0}(R_1) \\ &= 1 \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{r_1 = 0.}$ De la même manière, on obtient que

$$\boxed{\ell_1 = \tfrac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad m_1 = \tfrac{3}{4}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Recopier l'arbre de probabilités ci-dessous et rajouter les probabilités correspondantes sur les différentes branches.

En utilisant les données du texte, on obtient,



(b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme le système (R_n, L_n, M_n) est un système complet d'évènements (le jour n le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned} P(R_{n+1}) &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(R_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times 0 + \ell_n \times \frac{1}{2} + m_n \times 12 \end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\boxed{r_{n+1} = \tfrac{1}{2}\ell_n + \tfrac{1}{2}m_n.}$$

(c) Déterminer une relation analogue entre ℓ_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. De manière analogue, comme le système (R_n, L_n, M_n) est un système complet d'évènements (le jour n le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}\ell_{n+1} &= P(R_n)P_{R_n}(L_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(L_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(L_{n+1})\\ &= r_n \times \frac{1}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + m_n \times 14\\ &= \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n.\end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\boxed{\ell_{n+1} = \tfrac{1}{4}r_n + \tfrac{1}{4}\ell_n + \tfrac{1}{4}m_n.}$$

(d) Déterminer une relation analogue entre m_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.

De la même manière, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m_{n+1} = \tfrac{3}{4}r_n + \tfrac{1}{4}\ell_n + \tfrac{1}{4}m_n.}$$

3. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation

$$U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$

(a) Donner U_0.

En utilisant la question 1(a), on a

$$\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), on a

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \ell_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n \\ \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n \\ \frac{3}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix} = AU_n,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Démontrer alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$

Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $U_n = A^n U_0$ » est vraie.

- *Initialisation* : Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_0 = A^0 U_0$. Par convention $A^0 = I_3$. Donc, on a bien $U_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_n = A^n U_0$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Par construction (cf. question 3(b)),
$$U_{n+1} = AU_n.$$
Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : Donc, par principe de récurrence, on obtient
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.}$$

4. On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que pour tout $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

Soient
$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\begin{aligned}
PX = B \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & & & = & \alpha \\ 3x & & & + & z & = & \beta \\ 5x & - & y & - & z & = & \gamma \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & & & = & \alpha \\ & - & \frac{3}{4}y & + & z & = & \beta - \frac{3}{4}\alpha \\ & - & \frac{9}{4}y & - & z & = & \gamma - \frac{5}{4}\alpha \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4}L_1 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & & & = & \alpha \\ & - & \frac{4}{3}y & + & z & = & \beta - \frac{4}{3} \\ & & & - & 4z & = & \alpha - 3\beta + \gamma \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & & & = & \alpha \\ & - & \frac{4}{3}y & + & z & = & \beta - \frac{4}{3} \\ & & & & z & = & -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & - & y & = & \alpha \\ & & y & = & \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ & & z & = & -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \\ y & = & \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ z & = & -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{l'équation } PX = B \text{ admet une unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On en déduit que P est inversible et que

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$$

(b) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Comme P est inversible, on peut multiplier la relation $D = P^{-1}AP$ à gauche par la matrice P pour obtenir,

$$PD = PP^{-1}AP = AP,$$

car $PP^{-1} = I_3$. De même, en multipliant par P^{-1} la relation précédente, on obtient

$$\boxed{PDP^{-1} = A.}$$

(c) Montrer que D est une matrice diagonale.

En effectuant deux produits matriciels, on a

$$\begin{aligned} \boxed{D} &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.

En utilisant l'expression de D donnée à la question 4(c), par une récurrence immédiate, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(e) Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « A^n = PD^nP^{-1} »$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $A^0 = PD^0P^{-1}$. D'une part $A^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que

  $$A^n = PD^nP^{-1}.$$

  Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

  $$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

D'après la question 4(b), on a $A = PDP^{-1}$, donc,

$$A^{n+1} = A^n \times A = A^n PDP^{-1}.$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$$

(f) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des questions 4(d) et 4(e), on obtient

$$\begin{aligned} \boxed{A^n} &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(g) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de U_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 3(c), l'expression de U_0 donnée à la question 3(a) et l'expression de A^n donnée à la question 4(f), on obtient que

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}$$

5. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n, ℓ_n et m_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 4(g), et par définition du vecteur U_n, on a

$$\boxed{r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \ell_n = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad m_n = \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(b) Vérifier que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n + \ell_n + m_n = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$\begin{aligned}\boxed{r_n + \ell_n + m_n} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \\ &\boxed{= 1}\end{aligned}$$

(c) Déterminer les limites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par propriété sur les suites géométriques,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < -\frac{1}{2} < 1.$$

Donc, en utilisant les expressions des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvées à la question 5(a), on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \tfrac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} m_n = \tfrac{5}{12}.}$$

Et, comme $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, on a directement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \tfrac{1}{4}.}$$

6. (a) Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour ?

On cherche à calculer $P_{L_2}(M_1)$. Par la **formule de Bayes**, on a

$$P_{L_2}(M_1) = \frac{P(M_1)P_{M_1}(L_2)}{P(L_2)}.$$

Or d'après l'énoncé,

$$P_{M_1}(L_2) = \frac{1}{4}.$$

Puis, en utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$P(M_1) = m_1 = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad P(L_2) = \ell_2 = \frac{1}{4}.$$

Finalement, on a On cherche à calculer $P_{L_2}(M_1)$. Par la **formule de Bayes**, on a

$$P_{L_2}(M_1) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}.$$

Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour est de $\boxed{\tfrac{3}{4}.}$

(b) Le fait que le vélo se trouve à Landerneau le premier jour est-il indépendant du fait qu'il se trouve à Milizac le deuxième jour ?

On se demande si $P(M_2) = P_{L_1}(M_2)$. Pour cela, on va calculer les deux probabilités. D'une part, d'après l'énoncé,

$$P_{L_1}(M_2) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$P(M_2) = m_2 = \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Comme $P(M_2) = P_{L_1}(M_2)$, $\boxed{\text{les deux évènements sont indépendants.}}$

• **Partie 4 - Extrait de concours, ECRICOME 2023**

La correction de cette partie peut se trouver à l'adresse suivante (à partir de la page 5) : https://major-prepa.com/wp-content/uploads/2023/04/Ecricome-2023-MathAppli-corrige-Major-Prepa.pdf