

COLLE 19 - Semaine du 18/03 au 22/03

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours.

Chapitre XIX - Dérivabilité d'une fonction

- Étude locale de la dérivée
 - Dérivabilité en un point/Taux d'accroissement en un point/Nombre dérivé
 - Dérivabilité à gauche et à droite en un point/Nombre dérivé à gauche et à droite
 - Interprétation géométrique de la dérivée en un point : lien avec l'équation de la tangente en cas de dérivabilité, asymptote verticale en cas de non dérivabilité
 - Développement limité à l'ordre 1, utilisation pour calculer des limites
 - Lien entre continuité en un point et dérivabilité en un point
- Étude globale de la dérivée
 - Dérivabilité sur un intervalle
 - Ensemble de dérivation des fonctions usuelles (polynômes, racine carrée, exp, ln,...)
 - Opérations sur les fonctions dérivables (combinaisons linéaires, produit, quotient, dérivabilité de la fonction réciproque pour une fonction bijective)
- Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$
- Inégalités des accroissements finis, application à l'étude des suites récurrentes
- Lien entre dérivée et monotonie
- Lien entre dérivée et extrema locaux

Chapitre XX - Séries numériques

- Notion de série : somme partielle d'indice n , suite des sommes partielles, terme général
- Convergence/Divergence d'une série et notion de somme
- Condition nécessaire de convergence : si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_k$ diverge
- Cas particulier des séries de terme général positif : la suite des sommes partielles est croissante
- *(Les théorèmes de comparaison n'ont pas encore été vus, ni la notion de convergence absolue)*
- Séries de référence : séries télescopiques, séries géométriques et géométriques dérivées, séries exponentielles
- *(Les opérations sur les séries convergentes n'ont pas encore été vues.)*

Informatique

- Calculs simples en python : +, -, *, /, **
- Définir une variable. Afficher une valeur avec print.
- Charger la bibliothèque numpy (import numpy as np), fonctions usuelles : np.exp, np.log, np.sqrt
- Instruction conditionnelle if...elif...else
- Les listes
- Boucles for
- Boucles while
- Fonctions
- Matrices
- Tracer des graphes grâce au module Matplotlib
- Recherche d'un élément dans une liste

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice du cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). *Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.*

Un énoncé :

- Définition de la dérivabilité en un point (Chap XIX - Définition 1.1)
- Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de continuité et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes : polynômes, exp, ln et racine carrée (Chap XIX - Proposition 2.3 + Chap XVII - Proposition 1.7)

- Définition de convergence d'une série (Chap XX - Définition 1.4)
- Condition nécessaire de convergence (Chap XX - Proposition 2.1)
- Convergence des séries géométriques (Chap XX - Proposition 3.3)
- Convergence des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 (Chap XX - Proposition 3.5)
- Convergence des séries exponentielles (Chap XX - Proposition 3.7)

Un exercice :

- Montrer que la fonction suivante est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée. (Chap. XIX - Exemple 2.8)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les dérivées successives de f définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}$. (Chap. XIX - Exemple 3.6)
- Dresser le tableau de variation et l'allure de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f(x) = \frac{e^x}{1+x}$. (Chap. XIX - Exemple 4.7)

- Étudier la nature de la série suivante et donner sa somme en cas de convergence. (Chap. XX - Exemple 3.1)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

- Étudier la nature des séries suivantes et donner leur somme en cas de convergence (Chap. XX - Exemples 3.4 et 3.6)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{4} \right)^k \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{9}{10^k} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}} \quad \sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}}$$

- Étudier la nature des séries suivantes et donner leur somme en cas de convergence (Chap. XX - Exemple 3.8)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k!} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k \times k!} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{5^k}{k!}$$