XX. Séries numériques

Pour bien démarrer

#1 - Connaître les sommes finies usuelles.

i) Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} a = a(n+1)$

ii) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$

iii) Pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

iv) $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

#2 - Vers la notion de série.

Soit $q \in]-1,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Soit $q \in]-1,1[$. D'après la formule pour la somme finie d'une suite géométrique, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}\left(1-q^{n+1}\right).$$

Or, d'après le théorème sur la limite d'une suite géométrique, on a

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < q < 1.$$

Donc,

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Et sa limite vaut

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

On le note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

1 Convergence d'une série numérique

1.1 Définition d'une série numérique

Définition 1.1 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **somme partielle d'indice** n de la série de terme général u_k la quantité

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- On appelle suite des **sommes partielles** de la série de terme général u_k la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus souvent désignée comme la **série de terme général** u_k et qu'on note

$$\sum u_k \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k\geqslant 0} u_k.$$

Il faut faire très attention à la *nature* des objets mathématiques manipulés.

u_k (pour un k donné)	$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$	S_n (pour un n donné)	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_k$
Nombre réel	Suite	Nombre réel	Suite	Suite

Pour les séries formées à partir de suites définies uniquement à partir d'un certain rang k_0, on ajuste la définition de série et on considère plutôt

$$\sum_{k\geqslant k_0} u_k.$$

Exemple 1.2 — Calcul de sommes partielles.

Série	Terme général	S_0	S_1	S_3	S_n (pour un n donné)	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} 1$	$u_k = 1$	$S_0 = 1$	$S_1 = 1 + 1 = 2$	$S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$	$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$	$(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} k$	$u_k = k$	$S_0 = 0$	$S_1 = 0 + 1 = 1$	$S_2 = 0 + 1 + 2 = 3$	$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k$	$u_k = 2^k$	$S_0 = 1$	$S_1 = 1 + 2 = 3$	$S_2 = 1 + 2 + 4 = 7$	$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = (2^{n+1} - 1)$	$(2^{n+1} - 1)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$	$u_k = \frac{1}{k}$	$S_0 = 1$	$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ldots$	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 1.3 Expliciter la série suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k(k+1)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par télescopage, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc, la suite des sommes partielles de cette série est donnée par

$$\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1.2 Convergence d'une série numérique

Définition 1.4 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- La série $\sum u_k$ est dite **convergente** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, c'est-à-dire
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \ell \in \mathbb{R}.$$
Dans ce cas, la limite ℓ de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et est notée
$$\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
- La série $\sum u_k$ est dite **divergente** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, c'est-à-dire lorsqu'elle admet une limite infinie ou pas de limite.

Il faut faire très attention à la *nature* des objets mathématiques manipulés.

u_k (pour un k donné)	$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$	S_n (pour un n donné)	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_k$	$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$
Nombre réel	Suite	Nombre réel	Suite	Suite	Limite d'une suite <u>si</u> existence

Pour étudier la nature (convergence/divergence) de la série $\sum u_k$, on peut
- **Calculer**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle** S_n.
- Étudier la **convergence** de la **suite des sommes partielles** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.5 Étudier la nature de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2$.

On peut calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite donnée par
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$
Donc,
$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \text{ diverge .}$$

Exemple 1.6 Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{3^k}$.

On peut calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$
On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2} \qquad \text{car} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1.$$
Donc,
$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k} \text{ converge et que sa somme vaut } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}.$$

Exemple 1.7 Étudier la nature de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k(k+1)}$.

Grâce à un télescopage, on peut calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 \qquad \text{car} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k(k+1)} \text{ converge et que sa somme vaut } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Un des moyen d'étudier la nature d'une série est de passer par la suite de ces sommes partielles. Cependant, l'enjeu du chapitre est le suivant : *comment en étudiant seulement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, peut-on déterminer la nature de la série $\sum u_n$?* Seule une partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine.

2 Lien entre la série et le terme général

Avec les notations de la section précédente, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_n.$$

Ainsi, il y a un lien direct entre la série $\sum u_k$ (c'est-à-dire la suite des sommes partielles) et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple,

- Si la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (c'est-à-dire si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie) alors, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0.$$

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2.1 Condition nécessaire de convergence

Proposition 2.1 Voici deux formulations équivalentes du même résultat.
- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_k$ diverge (grossièrement).

! La réciproque est fausse : il ne suffit pas qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour que la série $\sum u_k$ converge. Prenons la suite définie par,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u_k = \ln(k+1) - \ln(k).$$

- D'une part, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

- D'autre part, la série $\sum u_k$ diverge car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Lorsque l'on étudie une série, la première chose à faire est donc de vérifier que le **terme général** de la série **tend vers 0**. Si ce n'est pas le cas, alors la série diverge (grossièrement) et l'étude est terminée. Sinon, il reste du travail pour déterminer s'il y a convergence ou divergence.

Exemple 2.2 — Repérer au premier coup d'oeil une divergence grossière.

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}} k$	Divergence grossière
$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k$	Divergence grossière
$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k$	Divergence grossière

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{k+1}$	Divergence grossière
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$	On n'en sait rien !
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$	On n'en sait rien !

2.2 Cas particuliers des séries à terme général positif

Soient $\sum u_k$ une série et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite des sommes partielles. On a déjà remarqué que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n+1} - S_n = u_n,$$

et donc que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, le théorème de la limite monotone donne le résultat suivant.

Proposition 2.3 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.
- Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge et donc la série $\sum u_k$ converge.
- Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$ et donc la série $\sum u_k$ diverge.

Pour étudier la nature (convergence/divergence) de la série $\sum u_k$, on peut
- Montrer que la série est à termes **positifs**.
- Montrer que la suite des sommes partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**.

Exemple 2.4 Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k^2} \geqslant 0$.
- Montrons que la suite des sommes partielles est majorée. Pour tout $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2, n]\!]$, on a
$$k-1 \leqslant k \quad \text{donc} \quad k(k-1) \leqslant k^2 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$
Donc, en sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \qquad \text{donc} \qquad S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$
Or, par télescopage, on obtient
$$\forall n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$
Et donc, finalement,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Ainsi, la série est à termes positifs, et ses sommes partielles sont majorées donc la série converge mais a priori, on ne peut pas calculer sa somme. *En fait, on peut montrer avec des techniques d'analyse hors programme que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 2.5 Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$ diverge. *On pourra utiliser le fait que* $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k} \geqslant 0$.
- Montrons que la suite des sommes partielles n'est pas majorée (ou directement qu'elle diverge vers $+\infty$). Pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on a
$$\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
Donc, en sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
Or, par télescopage, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$
Et donc, finalement,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \geqslant \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc, par minoration, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$. Donc la série diverge.

Proposition 2.6 — Théorème de comparaison des séries à termes positifs. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que
① Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$.
② La série $\sum v_k$ converge.
Alors la série $\sum u_k$ converge et
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Exemple 2.7 Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2+5}$ converge.

On a
① Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{1}{k^2+5} \leqslant \frac{1}{k^2}$.
② La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge cf Exemple 2.4).

Donc, par **comparaison des séries à termes positifs**, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2+5}$ converge.

Proposition 2.8 — Théorème de comparaison des séries à termes positifs. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que
① Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_k\leqslant v_k$.
② La série $\sum u_k$ diverge.
Alors la série $\sum v_k$ diverge.

Exemple 2.9 Montrer que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.

On a
① Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}$.
② La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k}$ diverge (cf Exemple 2.5).

Donc, par **comparaison des séries à termes positifs**, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.

Exemple 2.10 Montrer que la série suivante est divergente

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{k+1}{k^2}$$

On a
① Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\frac{k+1}{k^2}$.
② La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k}$ diverge (cf Exemple 2.5).

Donc, par **comparaison des séries à termes positifs**, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{k+1}{k^2}$ diverge.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition 2.11 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que la série $\sum u_k$ est **absolument convergente** lorsque la série (à termes positifs) $\sum |u_k|$ converge.

Proposition 2.12 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
On suppose que
① La série $\sum u_k$ est **absolument convergente**.
Alors, la série $\sum u_k$ converge et

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|$$

Ce théorème permet, lorsqu'on a une série dont le signe du terme général est variable, de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs, pour laquelle on dispose de plus d'outils.

Exemple 2.13 La série $\sum\frac{(-1)^k}{k^2}$ est absolument convergente car la série $\sum\frac{1}{k^2}$ converge.

3 Séries de référence

3.1 Séries télescopiques

Comme pour les sommes finies, les séries télescopiques de la forme

$$\sum (u_{k+1} - u_k)$$

sont importantes, car les sommes partielles se calculent explicitement.

Exemple 3.1 Étudier la nature de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$.

On reconnaît une série télescopique. On peut donc calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+2} - 1.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, c'est-à-dire la série converge et sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = -1.$$

Exemple 3.2 Étudier la nature de la série $\sum_{k\geqslant 2} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

En écrivant le terme générale de la forme suivante,

$$\forall k \geqslant 2, \qquad u_k = \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

on reconnaît la somme de deux suites télescopiques. On peut donc calculer directement les sommes partielles de la manière suivante, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite finie, c'est-à-dire la série converge et sa somme vaut

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.2 Séries géométriques et dérivées

Proposition 3.3 Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$$

appelée **série géométrique**.

- Si $q \in]-1, 1[$ alors la série converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

- Si $q \notin]-1, 1[$ alors la série diverge (grossièrement)

Esquisse de prevue. Soit $q \in]-1,1[$. On peut calculer explicitement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{1-q}$$

(Voir aussi Activité 2 de la Section "Pour bien démarrer"). ■

! Ce calcul de somme est valable uniquement si la somme commence à 1. De manière générale, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$, si la somme commence à k_0, on a

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}.$$

Exemple 3.4 — Convergence des séries géométriques.

Série	Convergence	Somme
$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k$	Divergence	
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{4}\right)^k$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{4}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k$	Divergence	
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{3^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=-\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{9}{10^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{10}$ et c.l.)	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{9}{10^k} = 9\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} = 10$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k}\right)^k$	On ne sait pas !	...
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{5^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{5}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{5^{k+1}}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{5}$ et cht indice)	$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{5^k} = \frac{1}{4}$

Proposition 3.5 Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère les séries

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kq^{k-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$$

appelée respectivement **série géométrique dérivée d'ordre 1** et **d'ordre 2**.

- Si $q \in]-1,1[$ alors les deux séries convergent et leur somme est donnée par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- Si $q \notin]-1,1[$ alors les deux séries divergent (grossièrement)

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction S_n par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

La fonction S_n est une fonction polynomiale, donc en particulier, est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $q \in]-1,1[$, on a

$$S_n'(q) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)-(1-q^{n+1})\times(-1)}{(1-q)^2} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Soit $q \in]-1, 1[$ fixe. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = S_n(q)$. Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Ceci clôt la démonstration pour la série géométrique dérivée d'ordre 1. ■

Exemple 3.6 — Convergence des séries géométriques dérivées.

Série	Convergence	Somme
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k2^{k-1}$	Divergence	
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$	Conv. (série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $q = \frac{1}{3}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$
$\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}}$	Conv. (série géométrique dérivée d'ordre 2 avec $q = \frac{1}{4}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = 128$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{2^k}$	Conv. (série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $q = \frac{1}{2}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

3.3 Série exponentielle

Proposition 3.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$$

appelée **série exponentielle**. La série converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Exemple 3.8 — Convergence des séries exponentielles.

Série	Convergence	Somme
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x = 2$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k \times k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x = \frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k \times k!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x = 1$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x = -1$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{5^k}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x = 5$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} - 1 = \mathrm{e}^5 - 1$
$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x = 1$)	$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 2$
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$	Conv. (série exponentielle avec cht indice)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}$

3.4 (HP) Séries de Riemann

Le résultat de cette section n'est pas au programme en première année (mais le sera en deuxième année) mais il est bon de connaître ce résultat fondamental.

Proposition 3.9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^\alpha}$$

appelée **série de Riemann**.

- Si $\alpha > 1$ alors la série converge.
- Si $\alpha \leqslant 1$ alors la série diverge.
- Plus précisément, si $\alpha \leqslant 0$, alors la série diverge grossièrement.

Exemple 3.10 — Convergence des séries de Riemann.

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$	Divergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{k^7}$	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} 1$	Divergence (grossière)
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k+1)^2}$	Convergence

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{\sqrt{k}}$	Divergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$	Convergence
$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k-1}$	Divergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-3}$	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2$	Divergence (grossière)

4 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 4.1 Soient a et b deux nombres réels, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Si $a\in\mathbb{R}$ est non nul, alors $\sum u_k$ et $\sum au_k$ ont la même nature. En cas de convergence, on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} au_k = a\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
2. Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont convergentes, alors $\sum(u_k+v_k)$ est aussi convergente et sa somme vaut :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+bv_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$
3. Si $\sum u_k$ est convergente, et $\sum v_k$ est divergente, alors $\sum(u_k+v_k)$ est divergente.

Proposition 4.2 Soit $k_0\in\mathbb{N}^*$. Les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum\limits_{k\geqslant k_0} u_k$ sont de même nature. En cas de convergence, on a
$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k$$

Exemple 4.3 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5\times 2^k+1}{k!}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que
$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \frac{5\times 2^k+1}{k!} = 5\times\frac{2^k}{k!}+\frac{1}{k!}$$

① **Montrer que la série converge.** Les séries $\sum \frac{2^k}{k!}$ et $\sum\frac{1}{k!}$ convergent (séries exponentielles) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,
$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5\times 2^k+1}{k!} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{5\times 2^k+1}{k!} = 5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = 5\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^1$$

Exemple 4.4 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.
$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{k+1}{2^k}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que
$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2}\times k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

① **Montrer que la série converge.** Les séries $\sum k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^k$ convergent (séries géométriques simple et dérivée d'ordre 1) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,
$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{k+1}{2^k} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

Exemple 4.5 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}} = 5^2 \times 7 \times \left(\frac{5}{7}\right)^k.$$

① **Montrer que la série converge.** La série $\sum \left(\frac{5}{7}\right)^k$ converge (série géométrique) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}} = 5^2 \times 7 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k = 5^2 \times 7 \times \frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{5^2 \times 7^2}{2} = \frac{1225}{2}.$$

Exemple 4.6 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{k^2}{3^k}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \frac{k^2}{3^k} = \frac{k(k-1)+k}{3^k} = \frac{1}{9} \times \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{1}{3} \times \frac{k}{3^{k-1}}$$

① **Montrer que la série converge.** Les séries $\sum \frac{k(k-1)}{3^{k-2}}$ et $\sum \frac{k}{3^{k-1}}$ convergent (séries géométriques dérivées) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série } \sum_{k\geqslant 2} \frac{k^2}{3^k} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k} &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} \\
&= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right) \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

Exemple 4.7 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{k(-1)^k}{k!}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k \geqslant 1, \qquad \frac{k(-1)^k}{k!} = -\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

① **Montrer que la série converge.** La série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$ converge (série exponentielle avec changement d'indice) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série } \sum_{k\geqslant 2} \frac{k(-1)^k}{k!} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(-1)^k}{k!} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = -\mathrm{e}^{-1}.$$