

TD 20 – SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 – Étude à la main d'une série (*).** On considère la série $\sum u_k$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{e^{-k} + e^k}$.

1. Déterminer la monotonie de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq e^{-k}$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de S_n .
4. En déduire que la série $\sum u_k$ est convergente. On note S sa somme.
5. Montrer que

$$S \leq \frac{e}{e-1}.$$

Correction.

1. La série étant à termes positifs (car, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 0$) donc on sait que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On peut re-démontrer ce résultat de la manière suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

Donc, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien croissante.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* ,

$$e^{-k} \geq 0 \quad \text{donc} \quad e^k + e^{-k} \geq e^k \quad \text{donc} \quad \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq \frac{1}{e^k} \quad \text{donc} \quad u_k \leq e^{-k}$$

De plus, $e^k + e^{-k} \geq 0$ donc $u_k \geq 0$. Finalement, on a bien montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_k \leq e^{-k}$$

3. D'après la question précédente, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_k \leq e^{-k}$$

Donc, en sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n e^{-k}$$

Or, la somme de droite est une somme géométrique, donc on peut la calculer de manière explicite comme suit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n e^{-k} = \sum_{k=0}^n (e^{-1})^k = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq S_n \leq \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie, que l'on note S , c'est-à-dire que la série $\sum u_k$ converge et sa somme est donnée par S .

4. Comme la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S et comme $-1 < e^{-1} < 1$,

$$\frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

en passant à la limite dans l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq S_n \leq \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$$

on obtient

$$0 \leq S \leq \frac{e}{e-1}.$$

■

Exercice 2 – Série télescopique (*).** Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{k \geq 2} u_k$?
2. Pour tout $n \geq 2$, transformer l'expression de u_n pour faire apparaître un télescopage.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 2} u_k$ est divergente.

Correction.

1. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

On ne peut rien conclure sur la convergence de la série !

2. On a

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n).$$

3. On peut expliciter la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ grâce à un télescopage de la manière suivante,

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n).$$

Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, c'est-à-dire, la série $\sum_{k \geq 2} u_k$ est divergente. ■

Exercice 3 – Série télescopique (★☆☆). Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)\ln(n+1)}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{k \geq 2} u_k$?
2. Pour tout $n \geq 3$, transformer l'expression de u_n pour faire apparaître un télescopage.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 3} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Correction.

1. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\ln(n)\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On ne peut rien conclure sur la convergence de la série !

2. On a

$$\forall n \geq 3, \quad u_n = u_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

3. On peut expliciter la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ grâce à un télescopage de la manière suivante,

$$\forall n \geq 3, \quad S_n = \sum_{k=3}^n u_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par $\frac{1}{\ln(2)}$, c'est-à-dire, la série $\sum_{k \geq 3} u_k$ converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \frac{1}{\ln(2)}$$

■

Exercice 4 – Série télescopique (*).** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, déterminer l'expression de S_n , la somme partielle d'ordre n , en fonction n en utilisant des télescopes.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En mettant les fractions au même dénominateur, on a

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Ainsi, par identification de polynôme, l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

est vérifiée si et seulement si

$$(S) \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$

En résolvant ce système linéaire, on obtient

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Et donc, finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

3. En utilisant le calcul de la question précédente, on obtient que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire la série $\sum u_k$ converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{4}$$

■

Exercice 5 – Convergence et Somme (*)**. Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-2)^k$ | 6. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}$ | 11. $\sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}}$ |
| 2. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$ | 7. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-2)^k}{k!}$ | 12. $\sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}}$ |
| 3. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!}$ | 8. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-3)^{k-1}}{k!}$ | 13. $\sum_{k \geq 0} \frac{k+3}{4^k}$ |
| 4. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{5^k}$ | 9. $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$ | 14. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k}$ |
| 5. $\sum_{k \in \mathbb{N}} k$ | 10. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{(-2)^k}$ | 15. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k+1}{3^{k+1}}$ |

Correction.

	Série	Convergence	Somme
1	$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-2)^k$	Divergence grossière	
2	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$	Convergence (série géométrique avec $q = \frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$
3	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!}$	Convergence (série exponentielle avec $x = 1$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$
4	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{5^k}$	Convergence (série géométrique avec $q = \frac{2}{5}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{5^k} = \frac{10}{3}$
5	$\sum_{k \in \mathbb{N}} k$	Divergence grossière	
6	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}$	Convergence (série géométrique avec $q = -\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}} = -\frac{1}{4}$
7	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-2)^k}{k!}$	Convergence (série exponentielle avec $x = -2$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2}$
8	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-3)^{k-1}}{k!}$	Convergence (série exponentielle avec $x = -3$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{k!} = -\frac{1}{3} \times e^{-3}$
9	$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 1 avec $q = \frac{1}{3}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{9}{4}$
10	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{(-2)^k}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 1 avec $q = -\frac{1}{2}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(-2)^k} = -\frac{2}{9}$
11	$\sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 2 avec $q = \frac{2}{3}$)	$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}} = 54$
12	$\sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 2 avec $q = \frac{2}{5}$)	$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}} = \frac{200}{27}$
13	$\sum_{k \geq 0} \frac{k+3}{4^k}$	Convergence (somme de deux séries géométriques)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+3}{4^k} = \frac{40}{9}$
14	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 1 avec $q = -\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k} = -\frac{3}{16}$
15	$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k+1}{3^{k+1}}$	Convergence (somme de deux séries géométriques)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4}$

■

Exercice 6 – Convergence et Somme (*)**. Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\sum_{k \geq m} q^k, q \in]-1, 1[, m \in \mathbb{N}$ | 4. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^2}{3^k}$ | 7. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k(k+1)}{(k+1)!}$ |
| 2. $\sum_{k \in \mathbb{N}} q^{2k}, q \in]-1, 1[$ | 5. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k+1}{k!}$ | 8. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^2 2^k}{k!}$ |
| 3. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k 2^k}{k!}$ | 6. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{(k+1)!}$ | 9. $\sum_{k \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ |

Correction.

1. La série

$$\sum_{k \geq m} q^k$$

est une série géométrique tronquée, convergente car $q \in]-1, 1[$ (la nature d’une série ne dépend pas de ces premiers termes) dont la somme est donnée par

$$\sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{q^m}{1-q}.$$

2. Remarquons que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q^{2k} = (q^2)^k.$$

Donc la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} q^{2k}$$

est une série géométrique convergente car $q^2 \in]-1, 1[$ (car $q \in]-1, 1[$) dont la somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$$

3. On ne reconnaît pas une série usuelle, repartons aux sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en simplifiant, puis en effectuant le changement d’indice $k' = k - 1$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k 2^k}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{k 2^k}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{k!} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$$

Or, la série $\sum \frac{2^k}{k!}$ converge (série exponentielle de paramètre 2). Donc la série $\sum \frac{k 2^k}{k!}$ converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k 2^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = 2e^2.$$

4. On remarque que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{k^2}{3^k} = \frac{k(k-1) + k}{3^k} = \frac{1}{9} \times k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

Or les séries

$$\sum k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \quad \text{et} \quad \sum k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

convergent car ce sont des séries géométriques (dérivée d’ordre 1 pour la seconde) de paramètre $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Par conséquent, la série

$$\sum \frac{k^2}{3^k}$$

converge par combinaison linéaire de séries convergentes. Et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{k(k-1) + k}{3^k} = \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{3}{2}.$$

5. On reconnaît pas une série usuelle, repartons aux sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}$, par linéarité et en effectuant le changement d'indice $k' = k - 1$ dans la première somme, on obtient,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Or la série

$$\sum \frac{1}{k!}$$

est convergente (série exponentielle). Donc la série

$$\sum \frac{k+1}{k!}$$

est convergente et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant un changement d'indice, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!}.$$

Or la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2^k}{k!}$$

est une série exponentielle (tronquée) donc convergente. Donc la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{(k+1)!}$$

converge également et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

■

Exercice 7 – Comparaison pour les séries à termes positifs. Déterminer la nature des séries suivantes

$$1. \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k^2 \ln(k)} \quad 2. \sum_{k \geq 3} \frac{\ln(k)}{k} \quad 3. \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Correction.

1. Pour tout $k \geq 3$, $k \geq e$ et donc par croissance de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$, $\ln(k) \geq 1$. Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\forall k \geq 3, \quad 0 \leq \frac{1}{k^2 \ln(k)} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Or, la série

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

converge car $2 > 1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{1}{k^2 \ln(k)}$$

converge.

2. En utilisant de nouveau le fait que pour tout $k \geq 3$, $\ln(k) \geq 1$, on obtient

$$\forall k \geq 3, \quad 0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

Or, la série

$$\sum \frac{1}{k}$$

diverge car $1 \leq 1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{\ln(k)}{k}$$

diverge.

3. En développant, on a

$$\forall k \geq 0, \quad (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \geq 4k^2.$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\forall k \geq 0, \quad 0 \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{4k^2}.$$

Or, la série

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

converge car $2 > 1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$$

■

Exercice 8 – Convergence absolue. Déterminer la nature des séries suivantes

$$1. \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}} \qquad 2. \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k e^{-k}}{k^2}$$

Correction.

1. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}} \right| = \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Or la série

$$\sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

converge car $\frac{3}{2} > 1$ (série de Riemann). Donc la série

$$\sum \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}} \right|$$

converge, c'est-à-dire la série

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}$$

converge absolument donc converge.

2. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{(-1)^k e^{-k}}{k^2} \right| = \frac{e^{-k}}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

car, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{-k} \leq 1$ par décroissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} . Or la série

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

converge car $2 > 1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série

$$\sum \frac{(-1)^k e^{-k}}{k^2}$$

converge absolument donc converge. ■