TD 21 – L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 – Méthodes 1 & 2, *Exemples 2.2, 2.3, 2.4, 2.6 & 2.7.* Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace E ? Justifier.

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=1\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^2$$

$$F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3y+z=0\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^4$$

$$F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0 \text{ et } 3x-y+z=0\right\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

2 Sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs

Exercice 2 – Méthode 3, *Exemple 2.9.* Soit $G = \mathrm{Vect}((1,-1,-1),(-6,1,4))$. Les vecteurs $v_1 = (1,4,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$ appartiennent-ils à G ?

Exercice 3 – Méthode 4, *Exemple 2.17.* Exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que F_1 soit l'espace engendré par cette famille. Faire de même pour les espaces F_4 et F_5.

Exercice 4 – Méthode 5, *Exemple 2.18.*

1. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1,2,3)$. Soit $G_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_1.
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-1,0,1)$. Soit $G_2 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_2.
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$ Soit $G_3 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_2.

3 Familles génératrices

Exercice 5 – Méthode 6, *Exemple 3.3.*

1. Montrer que $((1,2),(0,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 – Méthode 7, *Exemple 3.5.*

1. Montrer que $F_5 = \{(t,4t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_7 = \{(a,a+b,b),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
3. Montrer que $F_8 = \{(a+b,a-2b,3b-a),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 7 – Méthode 7, *Exemple 3.6.*

1. Montrer que $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_{10} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

4 Familles libres

Exercice 8 – Méthode 8, *Exemple 3.10.* Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 – Méthodes 8 & 9, *Exemples 3.10, 3.11, 3.12 & 3.13.* Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$
2. $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$
3. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$

5 Bases

Exercice 10 – Méthode 10, *Exemples 3.16 & 3.18.*

1. Montrer que la famille $((1,2),(-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 – Méthode 11, *Exemple 3.19.* On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,0,3)$, $u_3 = (1,2,3)$ et $u_4 = (-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Exercice 12 – Méthode 12, *Exemple 3.20.* Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y=0\}$
2. $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0, x+2y+3z+4t=0\}$
3. $G_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2y=3z\}$
4. $G_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=z+t=t+x=0\}$

6 Dimension

Exercice 13 – Méthode 13, *Exemple 4.4.* Dans chaque cas, montrer que F est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension :

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+4z=0\right\}$
2. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=z+t=0\right\}$
3. $F = \left\{(3a-5b, 2a, a+b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 14 – Méthodes 13 & 14, *Exemples 4.4 & 4.7.* On pose $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\right\}$.

1. Déterminer la dimension de E
2. Montrer que $E = \text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$.

Exercice 15 – Méthode 15, *Exemple 4.12.* Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 – Méthode 16. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$. Déterminer $\text{rg}(e_1,e_2,e_3)$.

7 Pour aller plus loin

Exercice 17 – Soient

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+3z=0\} \\ G & = & \{(b-2a, a+2b, a+b) \text{ avec } a,b \in \mathbb{R}\} \\ H & = & \text{Vect}\Big(\ (1,5,1)\ ,\ (2,1,-1)\ ,\ (-1,4,2)\ \Big) \end{array}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. Déterminer une base de H.
4. Déterminer une équation cartésienne définissant G.
5. Déterminer une base de $F \cap G$.
6. Démontrer que $H = F$.

Exercice 18 – Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x-2y+z=0\right\}$ et $G = \text{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension de F et de G.
3. Déterminer la dimension de $F \cap G$.