Interrogation du 18/03/2024

NOM Prénom :

1. Étudier la nature de la série et donner sa somme en cas de convergence,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

2. Étudier la nature des séries suivantes et donner leur somme en cas de convergence,

a) $\sum_{k\in\mathbb{N}} 1$ b) $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{3^k}{k!}$ c) $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ d) $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{5^k}$ e) $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)}{6^{k-2}}$

1. Étudions la série suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

- Étape 1 : Déterminer la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

$$= \frac{1}{0+2} - \frac{1}{n+3} \quad \text{par télescopage}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$$

- Étape 2 : Convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après l'étape précédente, la suite $(S_n)_n$ admet une limite finie donnée par $\frac{1}{2}$.

- Conclusion : Donc la série $\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) \text{ converge}}$ et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2}}$$

Tournez la page ➔

2. a) La suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
Donc la série $\boxed{\sum 1 \text{ diverge grossièrement}}$.

b) La série $\sum \frac{3^k}{k!}$ est une série exponentielle (associée au paramètre 3) donc elle $\boxed{\text{converge}}$ et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} = e^3}$$

c) La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $\frac{1}{2} \in]-1,1[$
donc elle $\boxed{\text{converge}}$ et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4}$$

d) La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{5^k}$ ou $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{5}\right)^k$ est une série géométrique avec $\frac{1}{5} \in]-1,1[$ donc elle $\boxed{\text{converge}}$ et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}}$$

e) La série $\sum k(k-1)\frac{1}{6^{k-2}}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 2 avec $\frac{1}{6} \in]-1,1[$
donc elle $\boxed{\text{converge}}$ et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{6^{k-2}}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^3} = \frac{2\times 6^3}{5^3} = \boxed{\frac{432}{125}}$$