

Chapitre 19 : Dérivation d'une fonction

Pour bien démarrer : Connaître les dérivées usuelles

$\forall x \in \dots, f(x) = k$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$(u + v)' = \dots$
$\forall x \in \dots, f(x) = x^n$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$(ku)' = \dots$ pour $k \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \dots, f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$(u \times v)' = \dots$
$\forall x \in \dots, f(x) = \frac{1}{x}$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \dots$
$\forall x \in \dots, f(x) = \sqrt{x}$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dots$
$\forall x \in \dots, f(x) = e^x$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$(u^n)' = \dots$ et $(\sqrt{u})' = \dots$
$\forall x \in \dots, f(x) = \ln(x)$	$\forall a \in \dots, f'(a) = \dots$	$(\ln(u))' = \dots$ et $(\exp(u))' = \dots$

Le but de ce chapitre est de **démontrer** ces formules qui étaient jusqu'à présent admises et donc d'expliquer la construction de la notion de **dérivée**.

1 Étude locale de la dérivée

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1.1 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que la fonction f est **dérivable au point a** si le **taux d'accroissement** de f en a , c'est-à-dire le nombre réel

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a . Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé de f en a** et on note $f'(a)$, la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Exemple 1.2 — Preuve de la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable au point a et que

$$f'(a) = 2a.$$

Exemple 1.3 — **Preuve de la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.** On considère la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction f est dérivable au point a et que

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

mais que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exemple 1.4 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables au point a . Montrer que la fonction $f + g$ est dérivable au point a et que

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

1.2 Dérivabilité à gauche/à droite

Définition 1.5 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que la fonction f est **dérivable à droite** au point a si le **taux d'accroissement** de f en a admet une limite finie lorsque x tend vers a^+ . Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé à droite de f en a** et on note $f'_d(a)$, la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- On dit que la fonction f est **dérivable à gauche** au point a si le **taux d'accroissement** de f en a admet une limite finie lorsque x tend vers a^- . Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé à gauche de f en a** et on note $f'_g(a)$, la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

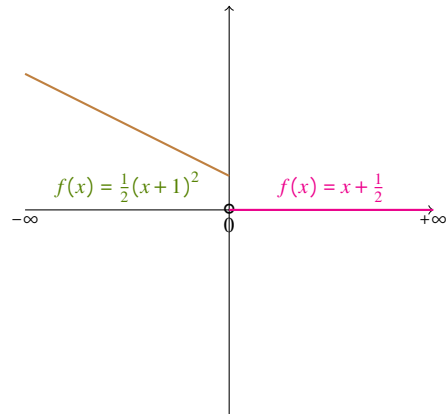
- On dit que f est **dérivable** en a lorsque f est dérivable à droite en a , f est dérivable à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, le **nombre dérivé de f en a** est donné par

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

Exemple 1.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est dérivable en 0.



Exemple 1.7 Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

1.3 Interprétation géométrique de la dérivée en un point

Proposition 1.8 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

- Si f est dérivable en a , alors la tangente au point d'abscisse a à $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation

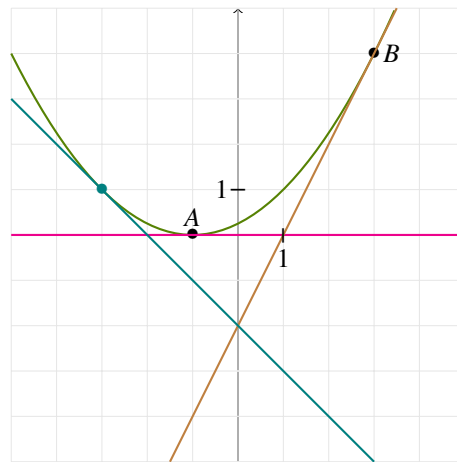
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Si le taux d'accroissement en a diverge vers $\pm\infty$, c'est-à-dire si

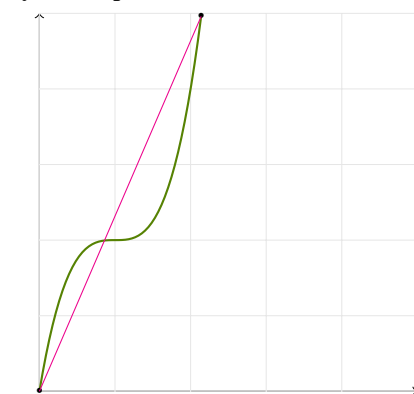
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty,$$

alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a , d'équation $x = a$.

Exemple 1.9 On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-5, 5]$. Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(3)$.



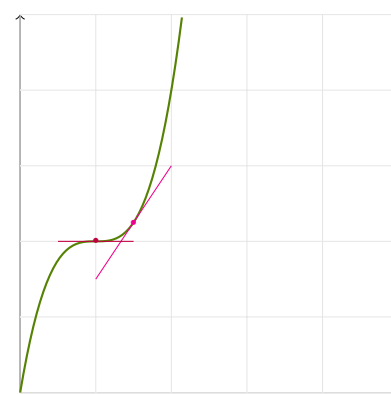
a) Pente moyenne & pente instantanée



Le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Lorsque les deux points sont «éloignés», cela correspond à «la **pente moyenne**».

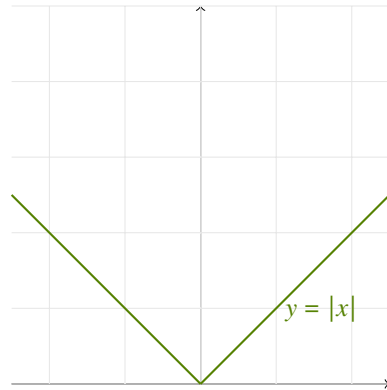


Le nombre dérivé

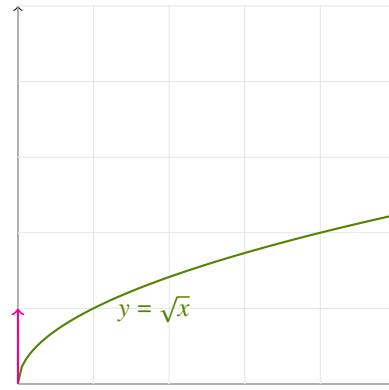
$$f'(a)$$

correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a . Cela correspond à regarder la pente entre deux points «très proche» et donc de regarder «la **pente instantanée**».

b) Deux défauts possibles de dérivabilité : cassure & pente infinie



La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car elle y présente une «**cassure**» : la pente à gauche de 0 est différente de la pente à droite de 0. Cela signifie que la fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite de zéro mais que les dérivées à droite et à gauche ne sont pas égales.

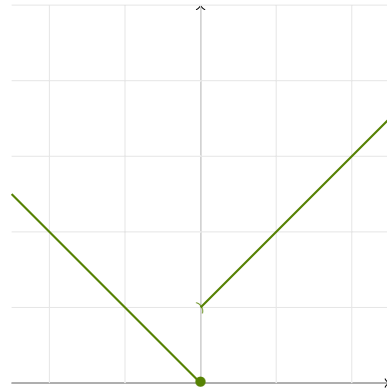


La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car elle y présente une «**pente infinie**» ou autrement dit une asymptote verticale. Cela signifie que la limite du taux d'accroissement en 0 est infinie.

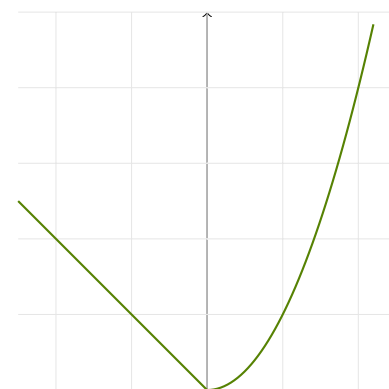
c) Fonction définie par morceaux : problème(s) de recollements

Pour une fonction définie par morceaux, divers problèmes peuvent apparaître au(x) point(s) de jonctions.

- Pour qu'une fonction soit continue au(x) point(s) de jonctions, il suffit de pouvoir «recoler» les deux expressions.
- Pour qu'une fonction soit dérivable au(x) point(s) de jonctions, il suffit de pouvoir «recoler» les deux expressions avec «la même pente».



La fonction n'est pas continue en 0 car les «deux morceaux ne se recollent pas».



La fonction est continue en 0 mais pas dérivable en 0 car les «deux morceaux se recollent mais pas avec la même pente».

1.4 Développement limité à l'ordre 1

Proposition 1.10 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f admet un **développement limité à l'ordre 1 en a** , c'est-à-dire qu'il existe une fonction ε telle que, pour tout $x \in I$ «suffisamment proche de a », on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

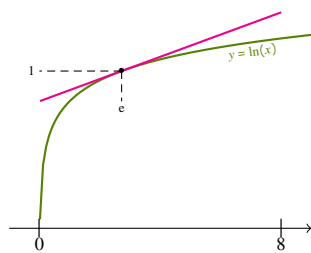
En particulier,

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

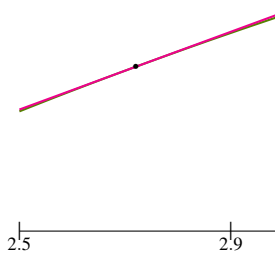
$$\ln(x+1) = x + x\tilde{\varepsilon}(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$$



De manière informelle, cela signifie que si on «zoome suffisamment fort» sur la courbe de la fonction autour du point $(a, f(a))$, la courbe de la fonction «ressemble beaucoup» à sa tangente au point d'abscisse a . On dit que localement autour d'un point, on peut confondre la courbe de la fonction et sa tangente.



Globalement, la courbe du logarithme et de sa tangente en e sont très différentes.



Mais si on «zoome suffisamment fort», la courbe du logarithme et de sa tangente en e sont quasiment confondues. De manière informelle, on peut dire que, au «voisinage de 0», on a

$$\ln(1+x) \approx x.$$

Exemple 1.11 Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

Proposition 1.12 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a .
- La réciproque est fautive : si une fonction est continue en un point, elle n'est pas forcément dérivable en ce point.



Attention, attention et encore attention. La réciproque est fautive ! La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0. De même, la fonction racine carrée est continue en 0 mais pas dérivable en 0. Cf. graphes de la Section 1.3. b)

2 Étude globale de la dérivée

2.1 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 2.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I . On définit alors sa **fonction dérivée** par

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de f le plus grand ensemble sur lequel f est dérivable.

Proposition 2.2 Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle I .

Proposition 2.3 — Dérivabilité des fonctions usuelles.

- Les fonctions constantes, $x \mapsto x^n$, $\exp$, $\ln$ sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- La fonction inverse est définie, continue et dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction racine carrée est définie et continue sur $[0, +\infty[$ mais seulement dérivable sur $]0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais seulement dérivable sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Le fait de connaître la dérivabilité des fonctions usuelles permet, en reconnaissant des taux d'accroissements, de résoudre l'indétermination de certaines limites.

Exemple 2.4 — ② Calculer une limite. (♥) Calculer les limites suivantes

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{iii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 2.5 Les combinaisons linéaires, le produit, l'inverse, le quotient et la composée (s'ils sont bien définis) de fonctions dérivables sont des fonctions dérivables.



Dès qu'on peut, on étudie directement la dérivabilité d'une fonction **par opérations** sur les fonctions usuelles qui sont dérivables. On étudie la dérivabilité **via le taux d'accroissement** seulement aux points pathologiques : lorsqu'il y a un **changement d'expression** de la fonction, ou une **racine carrée/valeur absolue** dans l'expression de la fonction.

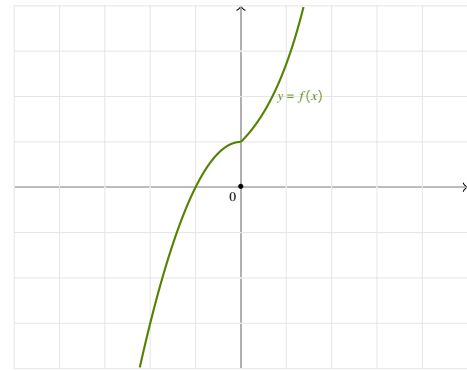
Exemple 2.6 Montrer que la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

Exemple 2.7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Faire une conjecture sur la continuité et dérivabilité de la fonction à partir du graphe.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.



2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 2.8 Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction **bijective** de I sur J , de bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$.

On suppose que

- ① la fonction f est **dérivable** sur I ,
- ② la dérivée de f ne s'**annule pas** sur I .

Alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Démonstration. On sait que

$$\forall x \in J, \quad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

En dérivant cette égalité, on obtient que,

$$\forall x \in J, \quad f^{-1}(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Comme f' ne s'annule pas, on obtient que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

■

Exemple 2.9 On considère la fonction f définie sur $I =]0, \frac{1}{2}[$ par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 2e^{-x}\sqrt{x}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection entre I et un intervalle à déterminer.
2. On note $g = f^{-1}$. Justifier que g est dérivable sur J et que

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \frac{2\sqrt{g(x)}}{e^{-g(x)}(1 - 2g(x))}.$$

3 Dérivées successives

Définition 3.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit les **dérivées successives** de f sur I par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \quad \text{à condition que } f^{(n)} \text{ existe} \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction $f^{(n)}$ est bien définie, on l'appelle la **dérivée n -ième** de f ou la **dérivée d'ordre n** de f . On dit que f est **n fois dérivable** sur I .
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I , on dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I .

Exemple 3.2 Calculer les dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4.$$

Définition 3.3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et que f' est continue sur I .
2. On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur I si f est 2 fois dérivable sur I et que f'' est continue sur I .
3. On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

 Pour montrer qu'une fonction est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I , il s'agit de montrer :

- qu'elle est bien définie et continue sur I ,
- qu'elle est dérivable sur I et calculer sa dérivée,
- et que sa dérivée est continue sur I .

En particulier, une fonction dérivable n'est pas forcément de classe $\mathcal{C}^1$, il ne faut pas oublier de discuter de la continuité de la dérivée.

Proposition 3.4 Les fonctions usuelles - polynomiales, exp, ln - sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Proposition 3.5 Les combinaisons linéaires, produits, quotients, puissances, composées de fonctions n fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$) sont n fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Exemple 3.6 Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{ax}.$$

Exemple 3.7 On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, 1[$.