TD 21 – L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (Correction)

1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 – Méthodes 1 & 2, *Exemples 2.2, 2.3, 2.4, 2.6 & 2.7.* Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace E ? Justifier.

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\} \qquad \text{dans } E=\mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=1\} \qquad \text{dans } E=\mathbb{R}^3$$

$$F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\} \qquad \text{dans } E=\mathbb{R}^2$$

$$F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3y+z=0\} \qquad \text{dans } E=\mathbb{R}^4$$

$$F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0 \text{ et } 3x-y+z=0\right\} \qquad \text{dans } E=\mathbb{R}^3$$

Correction.

- Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  ① F_1 est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$.
  ② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartient à F_1 car $0+0-2\times 0=0$.
  ③ Soient $u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de F_1, c'est-à-dire deux éléments de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient
  $$x_1+y_1-2z_1=0 \qquad \text{et} \qquad x_2+y_2-2z_2=0$$
  et soient a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au+bv$ est dans F_1.
  - Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au+bv$ est donné par
  $$au+bv = a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2) = (ax_1+bx_2, ay_1+by_2, az_1+bz_2) = (X,Y,Z).$$
  - Montrons que $au+bv \in F_1$, c'est-à-dire que
  $$X+Y-2Z=0.$$
  En utilisant le fait que u et v sont dans F_1, on obtient que
  $$\begin{aligned} X+Y-2Z &= ax_1+bx_2+ay_1+by_2-2(az_1+bz_2) \\ &= a(x_1+y_1-2z_1)+b(x_2+y_2-2z_2) \\ &= a\cdot 0+b\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Donc $au+bv \in F_1$.

  Finalement, $\boxed{F_1 \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

- L'ensemble $\boxed{F_2 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ car l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$ n'appartient pas à F_2 car $0+0-2\times 0 \neq 1$.

- L'ensemble $\boxed{F_3 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire. En effet, l'élément $(1,1)$ appartient à F_3 (car $1^2=1$) et l'élément $(-1,1)$ aussi (car $1=(-1)^2$). Pourtant, l'élément $(1,1)+(-1,1)=(0,1)$ n'appartient pas à F_3 car $1\neq 0^2$.

- On montre que $\boxed{F_4 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.}$

- On montre que $\boxed{F_5 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

■

2 Sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs

Exercice 2 – Méthode 3, *Exemple 2.9*. Soit $G = \text{Vect}((1,-1,-1),(-6,1,4))$. Les vecteurs $v_1 = (1,4,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$ appartiennent-ils à G ?

Correction.

- Montrons que $v_1 = (1,4,1) \in G$, c'est-à-dire trouvons deux réels a et b tels que
$$v_1 = a(1,-1,-1)+b(-6,1,4).$$
Pour trouver les coefficients a et b, on peut résoudre le système donné par l'égalité au-dessus. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$v = a(1,-1,-1)+b(-6,1,4) \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=1 \\ -a+b=4 \\ -a+4b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=1 \\ -5b=5 \\ -2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$
Finalement, on obtient que
$$v_1 = -5(1,-1,-1)-(-6,1,4).$$
Et donc que $\boxed{v_1 \text{ appartient à } G.}$

Montrons que $v_2 = (-1,0,1) \notin G$. Supposons par l'absurde que $v_1 \in G$. Alors, il existe deux réels a et b tels que
$$v_2 = a(1,-1,-1)+b(-6,1,4),$$
c'est-à-dire
$$\begin{cases} a-6b=-1 \\ -a+b=0 \\ -a+4b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=1 \\ -5b=-1 \\ -2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=1 \\ b=\frac{1}{5} \\ b=0 \end{cases}$$
Les deux dernières lignes sont incompatibles. C'est absurde. Donc $\boxed{v_2 \text{ n'appartient pas à } G.}$ ■

Exercice 3 – Méthode 4, *Exemple 2.17*. Exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que F_1 soit l'espace engendré par cette famille. Faire de même pour les espaces F_4 et F_5.

Correction.

- Soit $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-2z=0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z.

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-y+2z \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u\in F_1 \quad &\Leftrightarrow \quad u=(-y+2z,y,z) && \text{(Étape 4)}\\ &\Leftrightarrow \quad u=y(-1,1,0)+z(2,0,1) && \text{(Étape 5)}\\ &\Leftrightarrow \quad u\in \mathrm{Vect}((-1,1,0),(2,0,1)) && \text{(Étape 6)}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_1=\mathrm{Vect}((-1,1,0),(2,0,1)).}$$

Ceci redémontre au passage que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On montre de même que

$$\boxed{F_4=\mathrm{Vect}((1,0,-2,0),(0,1,-3,0),(0,0,0,1)).}$$

- Soit $F_5=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0 \text{ et } 3x-y+z=0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$u\in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 0\\ 3x & - & y & + & z & = & 0\end{array}\right. \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a deux équation pour trois inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante - ici z.

$$u\in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 0\\ & - & 7y & - & 5z & = & 0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{4}{7}z\\ y & = & -\frac{5}{7}z\end{array}\right. \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u\in F_5 \quad &\Leftrightarrow \quad u=\left(-\tfrac{4}{7}z,-\tfrac{5}{7}z,z\right) && \text{(Étape 4)}\\ &\Leftrightarrow \quad u=z\left(-\tfrac{4}{7},-\tfrac{5}{7},1\right) && \text{(Étape 5)}\\ &\Leftrightarrow \quad u\in\mathrm{Vect}\left(\left(-\tfrac{4}{7},-\tfrac{5}{7},1\right)\right) && \text{(Étape 6)}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_5=\mathrm{Vect}\left(\left(-\tfrac{4}{7},-\tfrac{5}{7},1\right)\right)}$$

Ceci redémontre au passage que F_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

■

Exercice 4 – Méthode 5, *Exemple 2.18.*

1. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1,2,3)$. Soit $G_1 = \text{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_1.
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-1,0,1)$. Soit $G_2 = \text{Vect}(u_1,u_2)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_2.
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$ Soit $G_3 = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_2.

Correction.

1. Soit $G_1 = \text{Vect}((1,2,3))$. Trouvons un système d'équation·s définissant G_1. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G_1 &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\quad a(1,2,3) = u && \text{(Étape 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a = x \\ 2a = y \\ 3a = z \end{cases} && \text{(Étape 2)} \end{aligned}$$

   - Si $y = 2x$ et $z = 3x$ alors ce système admet bien une solution.
   - Si $y \neq 2x$ ou $z \neq 3x$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

   Finalement,

$$u \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x \quad \text{et} \quad z = 3x. \qquad \text{(Étape 3)}$$

   Donc

$$\boxed{G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = 3x\}} \qquad \text{(Étape 4)}$$

2. Soit $G_2 = \text{Vect}((1,2,3),(-1,0,1))$. Trouvons un système d'équation·s définissant G_2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G_2 &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad a(1,2,3) + b(-1,0,1) = u && \text{(Étape 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a - b = x \\ 2a = y \\ 3a + b = z \end{cases} && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} b = \frac{y}{2} - x \\ a = \frac{y}{2} \\ b = z - \frac{3y}{2} \end{cases} && \text{(Étape 2)} \end{aligned}$$

   - Si $\frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2}$ alors ce système admet bien une solution.
   - Si $\frac{y}{2} - x \neq z - \frac{3y}{2}$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

   Finalement,

$$u \in G_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y - 2x = 2z - 3y \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0 \quad \text{(Étape 3)}$$

   Donc

$$\boxed{G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}} \qquad \text{(Étape 4)}$$

3. On montre de même que $\boxed{G_3 = \mathbb{R}^3.}$

■

3 Familles génératrices

Exercice 5 – Méthode 6, *Exemple 3.3.*

1. Montrer que $((1,2),(0,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Soient $e_1 = (1,2)$ et $e_2 = (0,-1)$. Montrons que (e_1,e_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
   ① Les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à $\mathbb{R}^2$.
   ② Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe a et b deux réels tels que $u = ae_1 + be_2$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   $$ae_1 + be_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ 2a - b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 2x - y \end{cases}$$
   En prenant $a = x$ et $b = 2x - y$ on a bien $u = ae_1 + be_2$.
   Ceci prouve que $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^2.}$

2. Soient $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,1,1)$. Montrons que (e_1,e_2,e_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
   ① Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$.
   ② Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe a, b et c trois réels tels que $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   $$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ -b + c = z - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ 2c = z - x + y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(x - y + z) \\ b = \frac{1}{2}(x + y - z) \\ c = \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{cases} \end{aligned}$$
   En prenant $a = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x+y-z)$ et $c = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, on a bien $u = ae_1 + be_2 + ce_3$.
   Ceci prouve que $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2,e_3) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

■

Exercice 6 – Méthode 7, *Exemple 3.5.*

1. Montrer que $F_5 = \{(t,4t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_7 = \{(a,a+b,b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
3. Montrer que $F_8 = \{(a+b,a-2b,3b-a), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Correction.

1. Déterminons une famille génératrice de $F_5 = \{(t,4t), t \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec un paramètre (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\begin{aligned} u \in F_5 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ u = (t,4t) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ u = t(1,4) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((1,4)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$
Ainsi,
$$F_5 = \mathrm{Vect}((1,4))$$
donc F_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et la famille
$$\boxed{((1,4)) \text{ est génératrice de } F_5.}$$

2. Déterminons une famille génératrice de $F_7 = \{(a,a+b,b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{aligned} u \in F_7 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = (a,a+b,b) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = a(1,1,0)+b(0,1,1) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$
Ainsi,
$$F_7 = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$$
donc F_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille
$$\boxed{((1,1,0),(0,1,1)) \text{ est génératrice de } F_7.}$$

3. On montre de même que F_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille
$$\boxed{((1,1,-1),(1,-2,3)) \text{ est génératrice de } F_8.}$$

■

Exercice 7 – Méthode 7, *Exemple 3.6.*

1. Montrer que $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_{10} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

Correction.

1. Déterminons une famille génératrice de $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_9 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y+3z=0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici y et z.

$$u \in F_9 \quad \Leftrightarrow \quad x=2y-3z \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_9 &\Leftrightarrow u=(2y-3z,y,z) && \text{(Étape 4)}\\ &\Leftrightarrow u=y(2,1,0)+z(-3,0,1) && \text{(Étape 5)}\\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((2,1,0),(-3,0,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_9 = \mathrm{Vect}((2,1,0),(-3,0,1))$$

donc F_9 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille

$$\boxed{(2,1,0),(-3,0,1) \text{ est génératrice de } F_9.}$$

2. Déterminons une famille de génératrice de $F_{10} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_{10} \quad \Leftrightarrow \quad (S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& y &+& z & & &=& 0\\ 2x &+& y &+& z &-& t &=& 0 \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici z et t, grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& y &+& z & & &=& 0\\ &-& y &-& z &-& t &=& 0 \end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -z-t \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 3)} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_{10} &\Leftrightarrow u=(t,-z-t,z,t) && \text{(Étape 4)}\\ &\Leftrightarrow u=z(0,-1,1,0)+t(1,-1,0,1) && \text{(Étape 5)}\\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((0,-1,1,0),(1,-1,0,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_{10} = \mathrm{Vect}((0,-1,1,0),(1,-1,0,1))$$

donc F_{10} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et la famille

$$\boxed{(0,-1,1,0),(1,-1,0,1) \text{ est génératrice de } F_{10}.}$$

■

4 Familles libres

Exercice 8 – Méthode 8, *Exemple 3.10*. Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Correction. Soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (0,1,1)$. Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc
$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0)$$

donc
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

donc
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

donc
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

donc
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$ ■

Exercice 9 – Méthodes 8 & 9, *Exemples 3.10, 3.11, 3.12 & 3.13.* Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$;
2. $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$;
3. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$;
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$.

Correction.

1. Montrons que la famille (u_1,u_2) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   On a
   $$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$
   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est libre.}}$
2. Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est liée. On cherche $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \neq (0,0,0)$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   - **Première méthode** : On cherche «à l'oeil» un lien entre les trois vecteurs. En effet, on peut remarquer directement que
     $$u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
     Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est liée.
   - **Deuxième méthode** : On cherche une solution non nulle au système donné par la relation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
     $$\begin{array}{rcll} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. & \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_3 \end{array}\right. & \end{array}$$
     Finalement, on peut prendre $\lambda_3 = 1$ et donc $\lambda_1 = 1$, puis $\lambda_2 = -1$, et on retrouve que
     $$u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est liée.}}$
3. Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.
   Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   On a
   $$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(0,0,1) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$
   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$

4. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée. On peut remarquer directement que

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_4$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ est liée.}}$

■

5 Bases

Exercice 10 – Méthode 10, *Exemples 3.16 & 3.18.*

1. Montrer que la famille $((1,2),(-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Soient $u_1=(1,2)$ et $u_2=(-1,3)$. Montrons que la famille (u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   ① Tous les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à $\mathbb{R}^2$.
   ② Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=au_1+bu_2$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$u=au_1+bu_2 \iff \begin{cases} a-b=x \\ 2a+3b=y \end{cases} \iff \begin{cases} a-b=x \\ 5b=y-2x \end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-2L_1 \iff \begin{cases} a=\frac{3x}{5}+\frac{y}{5} \\ b=-\frac{2x}{5}+\frac{y}{5} \end{cases}$$

   Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=au_1+bu_2$.

   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

2. Soient $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(2,1,0)$ et $u_3=(1,1,1)$. Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   ① Tous les vecteurs u_1,u_2,u_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$.
   ② Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=au_1+bu_2+cu_3$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$u=au_1+bu_2+cu_3 \iff \begin{cases} a+2b+c=x \\ b+c=y \\ a+c=z \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b+c=x \\ b+c=y \\ -2b=z-x \end{cases} \quad L_3\leftarrow L_3-L_1 \iff \begin{cases} a=\frac{x}{2}-y+\frac{z}{2} \\ c=-\frac{x}{2}+y+\frac{z}{2} \\ b=\frac{x}{2}-\frac{z}{2} \end{cases}$$

   Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=au_1+bu_2+cu_3$.

   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

■

Exercice 11 – Méthode 11, *Exemple 3.19.* On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,0,3)$, $u_3 = (1,2,3)$ et $u_4 = (-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Correction. Trouvons une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

- Par construction, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre F. Cependant, ce n'est pas une famille libre (et donc pas une base) car, on peut remarquer par exemple que

$$u_3 = u_1 + u_2 \qquad \text{et} \qquad u_4 = -2u_1 + \frac{1}{3}u_2.$$

  Si on ne le voit pas directement, on peut chercher quatre réels a, b, c, d non tous nuls tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$ *en résolvant le système associé.* Ceci montre également que

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

  et donc que la famille (u_1, u_2) engendre également F.
- Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

  Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2) \text{ est une base de } F.}$ ■

Exercice 12 – Méthode 12, *Exemple 3.20*. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$;
2. $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$;
3. $G_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$;
4. $G_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$;

Correction.

1. Montrons que $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminons-en une base.
   - **Première étape :** On détermine une famille génératrice de G_1 grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :
   $$u \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0 \qquad \text{(Étape 2)}$$
   On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z.
   $$u \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y \qquad \text{(Étape 3)}$$
   Ainsi, on obtient que
   $$\begin{aligned} u \in G_1 &\Leftrightarrow u = (2y, y, z) && \text{(Étape 4)} \\ &\Leftrightarrow u = y(2,1,0) + z(0,0,1) && \text{(Étape 5)} \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((2,1,0),(0,0,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$
   Donc, la famille
   $$(u_1, u_2) = ((2,1,0),(0,0,1))$$
   est génératrice de G_1.
   - **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille (u_1,u_2) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a
   $$\begin{aligned} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} \quad & \left\{ \begin{array}{ccc} 2\lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ \text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$
   Donc, la famille (u_1,u_2) est une famille libre.
   - Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((2,1,0),(0,0,1)) \text{ est une base de } G_1.}$

2. Montrons que $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminons-en une base.
   - **Première étape :** On détermine une famille génératrice de G_2 grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :
   $$u \in G_2 \quad \Leftrightarrow \quad (S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{(Étape 2)}$$
   On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici z et t à l'aide du pivot de Gauss.
   $$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & + & 5t & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x & = & -\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t \\ y & = & -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in G_2 &\Leftrightarrow u = \left(-\tfrac{5}{3}z - \tfrac{2}{3}t, -\tfrac{2}{3}z - \tfrac{5}{3}t, z, t\right) && \text{(Étape 4)} \\ &\Leftrightarrow u = z\left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{5}{3}, 0, 1\right) && \text{(Étape 5)} \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\left(\left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{5}{3}, 0, 1\right)\right) && \text{(Étape 6)} \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\left((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3)\right) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3))$$

est génératrice de G_2.

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -5\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & - & 5\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3)) \text{ est une base de } G_2.}$

3. On montre de même que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\left(2,1,\tfrac{2}{3}\right)\right) \text{ est une base de } G_3.}$$

4. On montre de même que

$$\boxed{\text{la famille } ((-1,1,-1,1)) \text{ est une base de } G_4.}$$

■

6 Dimension

Exercice 13 – Méthode 13, *Exemple 4.4.* Dans chaque cas, montrer que F est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension :

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+4z=0\right\}$;
2. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=z+t=0\right\}$;
3. $F = \left\{(3a-5b,2a,a+b),\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Correction.

1. On peut montrer que la famille $((-5,1,0),(-4,0,1))$ est une base de F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de $\boxed{\text{dimension 2.}}$
2. On peut montrer que la famille $((-1,1,-1,1))$ est une base de F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension 1.}}$
3. On peut montrer que la famille $((3,2,1),(-5,0,1))$ est une base de F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de $\boxed{\text{dimension 2.}}$

■

Exercice 14 – Méthodes 13 & 14, *Exemples 4.4 & 4.7*. On pose $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\right\}$.

1. Déterminer la dimension de E
2. Montrer que $E = \text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$.

Correction.

1. On peut montrer que la famille $((-2,1,1,0),(4,-4,0,1))$ est une base de F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension 2.}}$

2. Montrons que $E = \text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$.
   (a) Montrons que $\text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big) \subset E$. On remarque que

$$\begin{array}{lcl} (2,1,-3,-1) \in E & \text{car} & 2+1-3 = 2-4(-1)+2(-3) = 0 \\ (2,-5,3,2) \in E & \text{car} & 2-5+3 = 2-4\cdot 2+2\cdot 3 = 0 \end{array}$$

   Ainsi, par stabilité par combinaison linéaire, $\text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big) \subset E$.
   (b) Montrons que les deux espaces sont de même dimension.
   - L'espace E est de dimension 2 (cf Question 1).
   - La famille $(2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)$ génère l'espace $\text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$ par construction. De plus, c'est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc, c'est une base de cet espace. Donc $\text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$ est de dimension 2 aussi.

   Donc $\boxed{E = \text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big).}$

■

Exercice 15 – Méthode 15, *Exemple 4.12.* Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction. Notons $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (1,2,3)$. Montrons que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

① Les vecteurs u_1, u_2 et u_3 appartiennent bien à $\mathbb{R}^3$.

② Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 0$. On a

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\text{donc} \quad & \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\text{donc} \quad & \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
\text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

③ On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et que $\operatorname{card}((u_1,u_2,u_3)) = 3$ donc $\operatorname{card}(u_1,u_2,u_3)) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc $\boxed{\text{la famille } ((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$ ■

Exercice 16 – Méthode 16. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$. Déterminer $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3)$.

Correction. Déterminons la dimension de $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.

- Par construction, la famille (e_1,e_2,e_3) engendre F. Cependant, ce n'est pas une famille libre car on peut par exemple remarquer que
$$e_2 = e_1 + e_3.$$
Ceci montre également que
$$F = \mathrm{Vect}(e_1,e_3)$$
et donc que la famille (e_1,e_3) engendre également F. Montrons que la famille (e_1,e_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_3) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. On a
$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccc} & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$
Donc, la famille (e_1,e_3) est une famille libre.

- Finalement, la famille (e_1,e_3) est une base de F et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Et donc
$$\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3) = \dim(F) = 2,$$
c'est-à-dire $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2,e_3) \text{ est de rang 2.}}$

■