XXI. L'espace $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

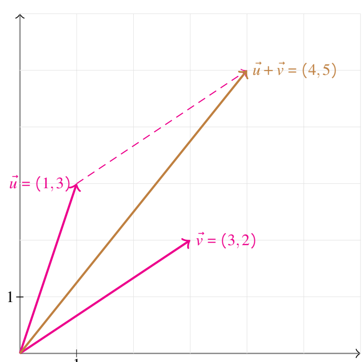
1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1 L'**ensemble** $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des ***n*-uplets** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, … et $x_n \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

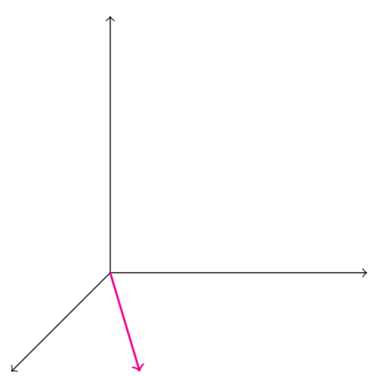
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 1.2

Espace	Forme générique des élements	Exemple d'éléments
$\mathbb{R}^2$	(x, y)	$(1,2)$, $(-1,0)$,...
$\mathbb{R}^3$	(x, y, z)	$(0,1,0)$, $(-1,\sqrt{2},4)$,...
$\mathbb{R}^4$	(x, y, z, t)	$(-3,6,\frac{1}{2},4)$, $(-1,10,0,0)$,...



Géométriquement, les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs du plan, représentés par leurs coordonnées cartésiennes.



Géométriquement, les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont des vecteurs de l'espace, représentés par leurs coordonnées cartésiennes.

Définition 1.3 L'espace $\mathbb{R}^n$ est munit de **deux opérations**. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{(addition - loi interne)}$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n) \quad \text{(multiplication par un réel - loi externe)}$$

On note $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$.

Exemple 1.4

Espace ambiant	Opération	Résultat
$\mathbb{R}^2$	$(-1,\frac{1}{3})+(1,1)$	$(0,\frac{4}{3})$
$\mathbb{R}^2$	$2\cdot(-1,\frac{1}{3})$	$(-2,\frac{2}{3})$
$\mathbb{R}^3$	$(-1)\cdot(1,0,2)+(4,2,-2)$	$(3,2,-4)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $v = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$ et soient a et b deux réels. L'élément

$$a\cdot u + b\cdot v = a\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)+b\cdot(y_1,y_2,\dots,y_n) = (ax_1+by_2,\dots,ax_n+by_n) \in \mathbb{R}^n.$$

est appelé **combinaison linéaire** de u et v (cette définition se généralise à plus de deux vecteurs). On remarque que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathbb{R}^n$ est **stable par combinaison linéaire**.

Proposition 1.5 Soient $u,v,w \in \mathbb{R}^n$ et $a,b \in \mathbb{R}$.

1. Propriétés de la loi interne $+$

$$u+(v+w) = (u+v)+w \qquad \text{(associativité)}$$
$$u+v = v+u \qquad \text{(commutativité)}$$
$$u+0_{\mathbb{R}^n} = u \qquad \text{(élément neutre)}$$

2. Propriétés de la loi externe $\cdot$

$$a\cdot(b\cdot u) = (ab)\cdot u \qquad \text{(associativité mixte)}$$

3. Distributivité entre les deux opérations

$$(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u \qquad \text{(distributivité)}$$
$$a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v \qquad \text{(distributivité)}$$

Ces propriétés permettent de dire que $\mathbb{R}^n$ est un **espace vectoriel**. Ses éléments sont alors appelées des **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{R}$ des **scalaires**.

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

2.1 Définition

Définition 2.1 Un ensemble F est appelé un **sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^n$ lorsque

	Axiome	Reformulation
①	F est un **sous-ensemble** de $\mathbb{R}^n$	$F \subset \mathbb{R}^n$
②	L'**élément neutre** appartient à F	$0_{\mathbb{R}^n} \in F$
③	F est stable par **combinaison linéaire**	$\forall (u,v) \in F,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ au+bv \in F.$

Méthode 1 - Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Il s'agit de vérifier que l'ensemble F vérifie les trois axiomes suivants.

① F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (pour un n donné)
② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à F (bien identifier le vecteur nul de l'espace considéré).
③ F est stable par combinaison linéaire.

« Soient u et v deux éléments de F et a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au+bv$ est dans F. »

Exemple 2.2 Montrer que l'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

① F est bien inclus dans $\mathbb{R}^2$.
② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ appartient à F car $0 = 3 \times 0$.
③ Soient $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de F, c'est-à-dire

$$y_1 = 3x_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = 3x_2$$

et a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au + bv$ est dans F.

- Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au + bv$ est donné par

$$au + bv = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) = (X, Y).$$

- Montrons que $au + bv \in F$, c'est-à-dire que

$$Y = 3X.$$

En utilisant le fait que u et v sont dans F, on obtient que

$$3X = 3(ax_1 + bx_2) = 3ax_1 + 2bx_2 = ay_1 + by_2 = Y.$$

Donc $au + bv \in F$.

Finalement, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.3 Montrer que l'ensemble $F = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

① F est bien inclus dans $\mathbb{R}^2$.
② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ appartient à F car $(0,0) = (t, 2t)$ avec $t = 0$.
③ Soient u et v deux vecteurs de F, c'est-à-dire

$$\exists t_1 \in \mathbb{R},\ u = (t_1, 2t_1) \qquad \text{et} \qquad \exists t_2 \in \mathbb{R},\ v = (t_2, 2t_2)$$

et a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au + bv$ est dans F.

- Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au + bv$ est donné par

$$au + bv = a(t_1, 2t_1) + b(t_2, 2t_2) = (at_1 + bt_2, 2(at_1 + bt_2)).$$

- Montrons que $au + bv \in F$, c'est-à-dire que

$$\exists t \in \mathbb{R},\ au + bv = (t, 2t).$$

En prenant $t = at_1 + bt_2$, on obtient le résultat souhaité.

Finalement, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.4 On considère le système linéaire (S) suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \text{ est solution de } (S)\}$. Montrer que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

① F est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$.
② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartient à F car $(0,0,0)$ est solution du système homogène (S).

③ Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de F, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' + y' + z' = 0 \\ y' - z' = 0 \end{cases}$$

et a, b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au + bv$ est dans F.

- Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au + bv$ est donné par

$$au + bv = a(x, y, z) + b(x', y', z') = (ax + bx', ay + by', az + bz') = (X, Y, Z)$$

- Montrons que $au + bv \in F$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ Y - Z = 0 \end{cases}$$

D'une part, en utilisant que u et v sont dans F, on a

$$X + Y + Z = ax + bx' + ay + by' + az + bz' = a(x + y + z) + b(x' + y' + z') = a \times 0 + b \times 0 = 0.$$

D'autre part, en utilisant encore que u et v sont dans F, on a

$$Y - Z = ay + by' - (az + bz') = a(y - z) + b(y' - z') = a \times 0 + b \times 0 = 0.$$

Donc, on a bien montré que $au + bv \in F$.

Finalement, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Cet exemple illustre le résultat général suivant.

Proposition 2.5 L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues et p équations est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Méthode 2 - Montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

Il s'agit de vérifier

- Soit que l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^n}$ n'appartient pas à F.
- Soit que F n'est pas stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire il faut exhiber deux vecteurs u_1 et u_2 de F et deux réels a et b tels que le vecteur $au_1 + bu_2$ n'appartiennent pas à F.

Exemple 2.6 Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

① F est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$.
② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à F car $0 + 0 + 0 \neq 1$.

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.7 Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

① F est bien inclus dans $\mathbb{R}^2$.
② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ appartient à F car $0 \times 0 = 0$.
③ Montrons que F n'est pas stable par combinaison linéaire. Les éléments $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$ appartiennent à F mais l'élément $u_1 + u_2 = (1, 1)$ n'appartient pas à F.

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition 2.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré** par la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ est l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. C'est un espace vectoriel, que l'on note $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Autrement dit,

$$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ u = \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_p u_p\}.$$

Méthode 3 - Expliciter des éléments un sous-espace engendré.

- Pour montrer qu'un élément appartienne à un sous-espace vectoriel engendré par une famille, il s'agit de montrer qu'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de la famille. Pour trouver les coefficients de cette combinaison linéaire, soit on les trouve «à l'oeil», soit on résout le système associé.

  « *Montrons que $u \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, c'est-à-dire montrons qu'il existe des scalaires/des réels λ_1,..., λ_p tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.*»
- Pour montrer qu'un élément n'appartient pas à un sous-espace vectoriel engendré par une famille, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille, et on résout le système associé, et on trouve une absurdité.

  « *Montrons que $u \notin \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Pour cela, supposons par l'absurde que $u \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ c'est-à-dire supposons qu'il existe des scalaires/des réels λ_1,..., λ_p tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.*»

Exemple 2.9 Soient $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$.
1. Montrer que $v = (5, 1, 1) \in F$.
2. Montrer que $w = (1, 1, 1) \notin F$.

1. Montrons que $v = (5, 1, 1) \in F$, c'est-à-dire trouvons a et b deux réels tels que $v = au_1 + bu_2$.
   - **Méthode 1 :** On cherche «à l'oeil» les coefficients a et b. En effet, on peut directement remarquer que
   $$v = 2u_1 + u_2 \qquad \text{donc} \qquad v \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$$
   - **Méthode 2 :** On résout le système donné par $v = au_1 + bu_2$ pour trouver les coefficients a et b. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
   $$v = au_1 + bu_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$
   On obtient de même que $v = 2u_1 + u_2$ et donc $v \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$.
2. Montrer que $w = (1, 1, 1) \notin F$. Supposons par l'absurde que $w \in F$. Alors, il existe a et b deux réels tels que
$$w = au_1 + bu_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a - b = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$
   Ceci est absurde. Donc $w \notin F$.

Proposition 2.10 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, le vecteur u_i appartient à F alors $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \subset F$.

Exemple 2.11 Montrer que $\operatorname{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$.

On doit montrer l'égalité entre deux ensembles, on procède par *double inclusion.*

- Montrons que $\operatorname{Vect}((1, 0), (0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$. Comme $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ et $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, par stabilité par combinaison linéaire, on a $\operatorname{Vect}((1, 0), (0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$.

- Montrons que $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}((1,0),(0,1))$. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que $u \in \text{Vect}((1,0),(0,1))$, c'est-à-dire trouvons a et b deux réels tels que $u = a(1,0)+b(0,1)$. Soit on résout le système, soit on remarque directement que

$$u=(x,y)=x(1,0)+y(0,1) \qquad \text{donc} \qquad u \in \text{Vect}((1,0),(0,1))$$

Ainsi, $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}((1,0),(0,1))$.

Exemple 2.12 Montrer que $\text{Vect}((1,1),(2,2)) = \text{Vect}((1,1))$.

On doit montrer l'égalité entre deux ensembles, on procède par *double inclusion.*

- Montrons que $\text{Vect}((1,1)) \subset \text{Vect}((1,1),(2,2))$. On remarque que

$$(1,1) = 1\cdot(1,1)+0\cdot(2,2) \in \text{Vect}((1,1),(2,2)).$$

  Donc par stabilité par combinaison linéaire, on a $\text{Vect}((1,1)) \subset \text{Vect}((1,1),(2,2))$.
- Montrons que $\text{Vect}((1,1),(2,2)) \subset \text{Vect}((1,1))$. On remarque que

$$(1,1) = 1\cdot(1,1) \in \text{Vect}((1,1))$$
$$(2,2) = 2\cdot(1,1) \in \text{Vect}((1,1)).$$

  Donc par stabilité par combinaison linéaire, on a $\text{Vect}((1,1),(2,2)) \subset \text{Vect}((1,1))$.

L'exemple précédent illustre les propositions suivantes.

Proposition 2.13 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $F = \text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(u_1,\dots,u_p)$. Si l'un des vecteurs - par exemple u_1 - s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs restants - par exemple $u_2,\dots,u_p$ alors

$$F = \text{Vect}(u_2,\dots u_p).$$

Autrement dit, $\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant $u_1,\dots,u_p$.

Proposition 2.14 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ des réels non nuls. Alors,

$$\text{Vect}(u_1,\dots,u_p) = \text{Vect}(\lambda_1 u_1,\dots,\lambda_p u_p).$$

Exemple 2.15 On a,

$$\text{Vect}\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right) = \text{Vect}((3,2,6),(1,2,2))$$

Méthode 4 - Écrire un ensemble comme un sev engendré

- Pour un ensemble F défini de manière **paramétrique**.
  1. On repère le nombre p de paramètres définissant l'ensemble.
  2. On caractérise l'appartenance à l'ensemble en fonction d'une écriture avec les paramètres,

$$u\in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists p \text{ paramètres, } u = (\text{écriture en fct des paramètres})$$

  3. On écrit tout élément de l'ensemble comme une somme de termes de la forme «paramètre · vecteur»,

$$u\in F \quad \Longleftrightarrow \quad \exists p \text{ paramètres, } u = \text{paramètre } 1\cdot \text{ vecteur } 1 + \cdots + \text{paramètre } p \cdot \text{ vecteur } p$$

  4. L'ensemble F s'écrit alors comme l'espace engendré par la famille de vecteurs exhibée à l'étape précédente.

$$F = \text{Vect}(\text{vecteur } 1,\dots, \text{ vecteur } p)$$

- Pour un ensemble défini de manière **conditionnelle**.
  1. On repère le nombre n d'inconnues et le nombre p d'équations définissant le système.
  2. On caractérise l'appartenance à l'ensemble en fonction d'un système,

$$u\in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{équation } 1 \\ \quad\vdots \\ \text{équation } p \end{cases}$$

3. On choisit p inconnues principales que l'on exprime en fonction des $n-p$ inconnues secondaires restantes à l'aide du pivot de Gauss.

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \text{inconnue } 1 = (\text{inconnues secondaires}) \\ \quad \vdots \\ \text{inconnue } p = (\text{inconnues secondaires}) \end{cases}$$

4. On écrit tout élément de l'ensemble en fonction des $n-p$ inconnues secondaires.

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = (\text{écriture en fct des inconnues secondaires})$$

5. On écrit tout élément de l'ensemble comme une somme de termes de la forme «inconnue secondaire $\cdot$ vecteur»,

$$u \in F \quad \Longleftrightarrow \quad u = \text{inconnue sec } 1 \cdot \text{ vecteur } 1 + \cdots + \text{inconnue sec} n-p \cdot \text{ vecteur } n-p$$

6. L'ensemble F s'écrit alors comme l'espace engendré par la famille de vecteurs exhibée à l'étape précédente.

$$F = \text{Vect}(\text{vecteur } 1, \ldots, \text{ vecteur } n-p)$$

Exemple 2.16 Soit $F = \{(a,b,a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que F est l'espace vectoriel engendré par cette famille.

L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres (Étape 1). On a :

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = (a,b,a+b) && \text{(Étape 2)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = a(1,0,1) + b(0,1,1) && \text{(Étape 3)} \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \text{Vect}((1,0,1),(0,1,1)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Donc

$$F = \text{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$$

Exemple 2.17 Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telle que F est l'espace vectoriel engendré par cette famille.

L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec deux inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 2y = 0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour deux inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple x - que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante - ici y.

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2y \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (-2y, y) && \text{(Étape 4)} \\ &\Longleftrightarrow \quad u = y(-2,1) && \text{(Étape 5)} \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \text{Vect}((-2,1)). && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Donc

$$F = \text{Vect}((-2,1))$$

Ceci démontre au passage que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Méthode 5 - Trouver un système d'équations définissant un sev engendré

Lorsqu'un ensemble F est défini comme un sev engendré par une certaine famille, pour en donner une définition de manière paramétrique, on peut

1. Caractériser l'appartenance à l'ensemble comme l'existence d'une combinaison linéaire de la famille génératrice.

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ des coefficients },\ u = \text{combinaison linéaire de la famille génératrice}$$

2. Transformer l'égalité en système (en travaillant coordonnées par coordonnées).

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ des coefficients },\ \begin{cases} \text{équation } 1 \\ \vdots \\ \text{équation } p \end{cases}$$

3. Trouver des conditions pour que le système précédent admette une solution.

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad \text{condition } 1,\ \text{condition} 2, \dots$$

4. Les conditions précédentes donnent l'écriture paramétrique de l'ensemble.

$$F = \{ \text{ vecteur } u \text{tel que condition } 1,\ \text{condition} 2, \dots \}$$

Exemple 2.18 Soit $F = \text{Vect}((1,1,0),(2,3,1))$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Trouver un système d'équations définissant F.

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a(1,1,0) + b(2,3,1) = u && \text{(Étape 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} a + 2b = x \\ a + 3b = y \\ b = z \end{cases} && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} a = x - 2z \\ b = y - x \\ b = z \end{cases} && \text{(Étape 2)} \end{aligned}$$

- Si $y - x \neq z$, le système n'a pas de solution donc la dernière équivalence n'est pas vraie, donc la première n'est pas vraie non plus, c'est-à-dire, $u \notin F$.
- Si $y - x = z$, alors le système admet une solution donnée par $(a,b) = (x - 2z, z)$, donc la dernière équivalence est vraie et donc la première aussi, c'est-à-dire $u \in F$.

Finalement

$$u \in F \Leftrightarrow y - x = z \qquad \text{(Étape 3)}$$

et donc,

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y - z = 0\}. \qquad \text{(Étape 4)}$$

3 Familles génératrices, familles libres, bases

3.1 Famille génératrice

Définition 3.1 Soient $u_1, \dots u_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vetoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $(u_1, \dots u_p)$ est **génératrice** de F si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

① Tous les vecteurs $u_1, \dots u_p$ appartiennent à F.

② Tout vecteur de F peut s'écrire comme une **combinaison linéaire** de $u_1, \dots, u_p$.

Autrement dit, la famille $(u_1, \dots u_p)$ est **génératrice** de F si et seulement si

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots u_p)$$

Proposition 3.2 Soient $n \in \mathbb{R}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice alors la famille $(u_1, \ldots, u_{p+1})$ est génératrice. Autrement dit, toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Méthode 6 - Montrer qu'une famille donnée est génératrice d'un sev.

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice d'un ensemble F, il s'agit de montrer que

① Tous les vecteurs appartiennent à l'ensemble.

② Tout vecteur l'ensemble peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille donnée. Pour ce faire, on résout le système associé pour trouver les coefficients de la combinaison linéaire.

« Soit $u \in F$. Montrons que u peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, c'est-à-dire montrons qu'il existe des scalaires/des réels λ_1,..., λ_p tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.»

Exemple 3.3 Soient $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (2,3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e_1, e_2) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

① Les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à $\mathbb{R}^2$.

② Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe a et b deux réels tels que $u = ae_2 + be_2$.

$$ae_1 + be_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ a + 3b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ b = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x - 2y \\ b = y - x \end{cases}$$

En prenant $a = 3x - 2y$ et $b = y - x$ on a bien $u = ae_1 + be_2$.

Exemple 3.4 Soient $e_1 = (-1,1,0)$ et $e_2 = (-1,0,1)$. Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (e_1, e_2) est une famille génératrice de F.

① Les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent bien à F car

$$-1 + 1 + 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad -1 + 0 + 1 = 0.$$

② Soit $u = (x,y,z) \in F$, c'est-à-dire $x + y + z = 0$. Montrons qu'il existe a et b deux réels tels que $u = ae_2 + be_2$.

$$ae_1 + be_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b = x \\ a = y \\ b = z \end{cases}$$

La première ligne n'est pas incompatible avec les deux autres car $x + y + z = 0$. Ainsi, en prenant $a = y$ et $b = z$ on a bien $u = ae_1 + be_2$.

Méthode 7 - Déterminer une famille génératrice d'un sev.

Cela revient à écrire l'ensemble comme un sev engendré. On utilise donc la Méthode 4.

Exemple 3.5 Soit $F = \{(2a - b, 3a + b + c, 5c - b) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une famille génératrice de F.

L'ensemble est défini de manière paramétrique avec trois paramètres (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ u = (2a - b, 3a + b + c, 5c - b) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ u = a(2,3,0) + b(-1,1,-1) + c(0,1,5) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \operatorname{Vect}((2,3,0),(-1,1,-1),(0,1,5)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \operatorname{Vect}((2,3,0),(-1,1,-1),(0,1,5))$$

et la famille

$$((2,3,0),(-1,1,-1),(0,1,5))$$

est génératrice de F.

Exemple 3.6 Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z=0 \text{ et } 2x-y+t=0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une famille génératrice de F.

L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F \iff (S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & - & y & & & + & t & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction de deux inconnues restantes - z et t, grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & - & 3y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & \frac{1}{3}z & - & \frac{1}{3}t \\ y & = & \frac{2}{3}z & + & \frac{1}{3}t \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F &\iff u = \left(\tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{3}t, \tfrac{2}{3}z + \tfrac{1}{3}t, z, t\right) && \text{(Étape 4)} \\ &\iff u = z\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 1\right) && \text{(Étape 5)} \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 1\right)\right) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)\right) = \mathrm{Vect}((1,2,3,0),(-1,1,0,3))$$

et la famille

$$((1,2,3,0),(-1,1,0,3))$$

est génératrice de F.

3.2 Famille libre

Définition 3.7 Soient $u_1, \ldots, u_p$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est **libre** (ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont **linéairement indépendants**) si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \iff \qquad \forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0.$$

Une famille non libre est dite **liée**.

Proposition 3.8 — Cas particuliers.

- **Famille à un vecteur :** Soit $u \in \mathbb{R}^n$. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
- **Famille à deux vecteurs :** Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille (u_1, u_2) est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_2 = \lambda u_1$.

Proposition 3.9 Soient $n \in \mathbb{R}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre alors la famille $(u_1, \ldots, u_{p-1})$ est libre. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Méthode 8 - Montrer qu'une famille donnée est libre.

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre, on suppose qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n}$ et on montre que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

« *Soit* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que* $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n}$. *Montrons que* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.»

Exemple 3.10 Soient $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,4,6)$. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.

Montrons que la famille (u_1,u_2) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=0$.

On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^3}\\ \text{donc} & \lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(-1,4,6)=(0,0,0)\\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0\\ 2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & = & 0\\ 3\lambda_1 & + & 6\lambda_2 & = & 0\end{array}\right.\\ \text{donc} & \lambda_1=\lambda_2=0\end{array}$$

Donc la famille (u_1,u_2) est libre.

Exemple 3.11 Soient $u_1=(1,2,-1)$, $u_2=(1,0,1)$ et $u_3=(0,0,1)$. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}\\ \text{donc} & \lambda_1(1,2,-1)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)\\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 & & \\ 2\lambda_1 & & & = & 0 & & \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\ \text{donc} & \lambda_1=0 \text{ puis } \lambda_2=0 \text{ puis } \lambda_3=0\end{array}$$

Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

Méthode 9 - Montrer qu'une famille donnée est liée.

Pour montrer qu'une famille $(u_1,\dots,u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée, on cherche à montrer qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ non tous nuls tel que $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_pu_p=0_{\mathbb{R}^n}$. Soit on trouve les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ «à l'oeil», soit on résout le système associé.

Exemple 3.12 Soient $u_1=(1,-1,1)$ et $u_2=(2,-2,2)$. Montrer que la famille (u_1,u_2) est liée.

On cherche $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^3}$.

On remarque directement que $u_2=2u_1$, c'est-à-dire que $2u_1-u_2=0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc la famille (u_1,u_2) est liée.

Exemple 3.13 Soient $u_1=(1,2,-1)$, $u_2=(1,0,1)$ et $u_3=(-1,2,-3)$. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est liée.

On cherche $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$, $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\neq(0,0,0)$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}$.

- **Première méthode** : On cherche «à l'oeil» un lien entre les trois vecteurs. En effet, on peut remarquer directement que
$$u_1+2u_2-u_3=0_{\mathbb{R}^3}.$$
- **Deuxième méthode** : On cherche une solution non nulle au système donné par la relation $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}$. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3} & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 & \\ & - & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ & & 2\lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = & 0 & L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=-\lambda_3\\ \lambda_2=2\lambda_3\end{array}\right.\end{array}$$

Finalement, on peut prendre $\lambda_3 = 1$ et donc $\lambda_1 = -1$, puis $\lambda_2 = 2$, et on retrouve que

$$u_1 + 2u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

3.3 Base

Définition 3.14 Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une **base** de F si

① Tous les vecteurs $u_1, \dots u_p$ appartiennent à F.
② La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
③ La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de F.

Proposition 3.15 Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une **base** de F si et seulement si

① Tous les vecteurs $u_1, \dots u_p$ appartiennent à F.
② Tout vecteur $u \in F$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $u = a_1 u_1 + \cdots a_p u_p$.

Méthode 10 - Montrer qu'une famille donnée est une base

Pour montrer qu'une famille donnée est une base d'un ensemble F,

- Soit on montre que la famille est libre (avec la Méthode 8) et qu'elle génère l'ensemble F (avec la Méthode 7/4).
- Soit on montre que
  ① Tous les vecteurs appartiennent à F.
  ② Tout vecteur de l'ensemble F peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire de la famille donnée. Pour trouver les coefficients de la combinaison linéaire, soit on le fait «à l'oeil», soit on résout le système associé.
  « *Soit $u \in F$. Montrons que u peut s'écrire de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$, c'est-à-dire montrons qu'il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$.*»

Exemple 3.16 Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

① Tous les vecteurs e_1, e_2, e_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$.
② Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. Pour cela, soit on résout le système associé, soit on peut remarquer directement que

$$u = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

De manière générale, on a le résultat suivant.

Proposition 3.17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie par

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

Alors, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée **base canonique**.

Exemple 3.18 Soient $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

① Tous les vecteurs u_1, u_2, u_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$.

② Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=au_1+bu_2+cu_3$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$
\begin{aligned}
u=au_1+bu_2+cu_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} & & b & + & c & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ a & + & b & & & = & z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & + & c & = & y \\ & & b & + & c & = & x \\ a & + & b & & & = & z \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccc} a & & + & c & = & y \\ & b & + & c & = & x \\ & b & - & c & = & z-x \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccc} a & & + & c & = & y \\ & b & + & c & = & x \\ & & - & 2c & = & z-y-x \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b & = & \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c & = & \frac{1}{2}(x+y-z) \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Donc, il existe un unique triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=au_1+bu_2+cu_3$.

Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (qui est différente de la base canonique).

Méthode 11 - Déterminer une base d'un sev engendré

Si un ensemble est défini comme un sous-espace vectoriel engendré, cela nous donne directement une famille génératrice. Il reste à en extraire une famille libre. Pour cela, on peut

- Regarder si la famille génératrice est libre. Si c'est le cas, on a trouvé une base.
- Si ce n'est pas le cas, alors il existe un vecteur qui est une combinaison linéaire des autres. On regarde alors si en ôtant ce vecteur à la famille génératrice, on obtient une famille libre. Si c'est le cas, on a trouvé une base. Sinon, on recommence.

Exemple 3.19 Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$F=\mathrm{Vect}((1,0),(1,1),(3,-2))$$

Trouvons une base du sous-espace vectoriel $F=\mathrm{Vect}((1,0),(1,1),(3,-2))$.

- La famille $((1,0),(1,1),(3,-2))$ engendre F. Cependant, ce n'est pas une famille libre (et donc pas une base) car, on peut remarquer par exemple que

$$(3,-2)=5(1,0)-2(1,1).$$

  Ceci montre aussi que la famille $((1,0),(1,1))$ engendre F.
- Montrons que la famille $((1,0),(1,1))$ est libre. Notons $u_1=(1,0)$ et $u_2=(1,1)$. Soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^2}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=0$. On a

$$
\begin{array}{ll}
 & \lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^2} \\
\text{donc} & \lambda_1(1,0)+\lambda_2(1,1)=(0,0) \\
\text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\
\text{donc} & \lambda_1=\lambda_2=0
\end{array}
$$

  Donc, la famille (u_1,u_2) est une famille libre.

Finalement, la famille (u_1,u_2) est une base de F.

Méthode 12 - Déterminer une base d'un ev donné par des équations
Pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel donné de manière paramétrique, on peut
- En déterminer une famille génératrice en utilisant la Méthode 7 (4).
- En extraire une famille libre grâce à la Méthode 11.

Exemple 3.20 Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

Déterminons une base du sev $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de F grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 2y + z = 0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z.

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2y - z \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{array}{rcll} u \in F & \Longleftrightarrow & u = (2y - z, y, z) & \text{(Étape 4)} \\ & \Longleftrightarrow & u = y(2,1,0) + z(-1,0,1) & \text{(Étape 5)} \\ & \Longleftrightarrow & u \in \text{Vect}((2,1,0),(-1,0,1)) & \text{(Étape 6)} \end{array}$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((2,1,0),(-1,0,1))$$

est génératrice de F.

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille $((2,1,0),(-1,0,1))$ est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(-1,0,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, la famille (u_1, u_2) est une base de F.

4 Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

4.1 Définition

Définition 4.1 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de F, et on le note $\dim(F)$.

Exemple 4.2

Exemple	Ensemble	Base	Dimension
3.16	$\mathbb{R}^3$	$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$	3
3.18	$\mathbb{R}^3$	$((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$	3
3.19	$\text{Vect}((1,0),(1,1),(3,-2))$	$((1,0),(1,1))$	2
3.20	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$	$((2,1,0),(-1,0,1))$	2

Proposition 4.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

Démonstration. On considère la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ définie par

$$e_1 = (1,0,\ldots,0),\ \ e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$ (appelée base canonique) et contient n éléments. Donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. ■

Méthode 13 - Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel

Pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

- On en détermine une base grâce aux Méthodes 10, 11 et 12.
- On compte le nombre d'éléments que contient cette base, et cela donne la dimension.

Exemple 4.4 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$. Montrer que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Déterminons la dimension du sev $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de F grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z = 0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z.

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad x = -y-z \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad u = (-y-z, y, z) && \text{(Étape 4)} \\ &\Leftrightarrow \quad u = y(-1,1,0) + z(-1,0,1) && \text{(Étape 5)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-1,1,0),(-1,0,1))$$

est génératrice de F.

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille $((-1,1,0),(-1,0,1))$ est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(-1,1,0) + \lambda_2(-1,0,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, la famille (u_1, u_2) est une base de F. Ainsi, F est de dimension finie et

$$\dim(F) = \mathrm{card}(u_1, u_2) = 2$$

4.2 Propriétés

Proposition 4.5 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$0 \leqslant \dim(F) \leqslant n.$$

De plus,

- $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
- $\dim(F) = n$ si et seulement si $F = \mathbb{R}^n$.

Proposition 4.6 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Méthode 14 - Montrer l'égalité de deux sev

Pour montrer l'égalité de deux sev F et G, on peut

- Soit procéder par double inclusion, c'est-à-dire montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$ (*cf Exemples 2.8 & 2.9*).
- Soit montrer que
  1. une des deux inclusions est vraie, c'est-à-dire par exemple montrer que $F \subset G$ (on choisit l'inclusion «la plus facile» à démontrer)
  2. les deux espaces ont la même dimension, c'est-à-dire que $\dim(F) = \dim(G)$.

Exemple 4.7 Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,-2),(1,-3,2))$. Montrer que $F = G$.

Montrons que $F = G$.

1. Montrons que $G \subset F$. D'après la Proposition 2.9, il suffit de montrer que

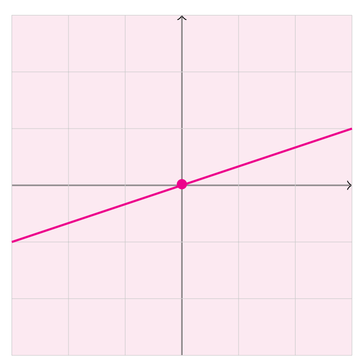
$$(1,1,-2) \in F \qquad \text{et} \qquad (1,-3,2) \in F.$$

   Or, $1+1-2=0$ donc $(1,1,-2) \in F$. Et $1-3+2=0$ donc $(1,-3,2) \in F$. Ainsi, $G \subset F$.
2. Montrons que F et G sont de même dimension.
   - L'espace F est de dimension 2 (cf Exemple 4.4).
   - Déterminons la dimension de G en utilisant la Méthode 11. La famille $((1,1,-2),(1,-3,2))$ génère G et de plus, c'est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((1,1,-2),(1,-3,2))$ est une base de G, c'est-à-dire que G est de dimension 2.

   Donc $F = G$.

Exemple 4.8 Caractérisons les sous-espaces vectoriels possibles.

Dimension possible	Sous-espace vectoriel
0	$F = \{(0,0)\}$
1	$F = \mathrm{Vect}(u)$ (droite vectorielle)
2	$F = \mathbb{R}^2$



4.3 Familles libres, génératrices, bases et dimension

Proposition 4.9 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et que $\mathcal{L}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors

$$\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leqslant \dim(E) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{G}).$$

2. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E et que $\mathrm{card}(\mathcal{F}) > \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
3. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E et que $\mathrm{card}(\mathcal{F}) < \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E.

Exemple 4.10

Famille	Espace ambiant	Libre	Génératrice
$\mathcal{F} = ((18,-63),(5,-6),(17,-48))$	$\mathbb{R}^2$	Non	On ne sait pas
$\mathcal{F} = ((1,2,3),(7,2,4))$	$\mathbb{R}^3$	On ne sait pas	Non
$\mathcal{F} = ((1,2),(3,4),(5,6))$	$\mathbb{R}^3$	On ne sait pas	On ne sait pas

Proposition 4.11 Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille de vecteurs de F.

- Si la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre et que $\mathrm{card}(u_1,\ldots,u_p) = \dim(F)$, alors la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est une base de F.
- Si la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ génère F et que $\mathrm{card}(u_1,\ldots,u_p) = \dim(F)$, alors la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est une base de F.

Méthode 15 - Montrer qu'une famille est une base de F connaissant sa dimension

Pour montrer qu'une base de F, connaissant la dimension de F, on peut

① Montrer que tous les vecteurs de la famille sont dans l'espace.
② Montrer que la famille est libre (grâce à la Méthode 8) (ou génératrice, mais c'est souvent plus simple de montrer qu'elle est libre).
③ Montrer que la famille possède autant d'éléments que la dimension de l'espace.

Exemple 4.12 Soient $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (1,-3)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

① Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent bien à $\mathbb{R}^2$.

② Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. *Soient* $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. *Montrons que* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\
\text{donc} \quad & \lambda_1(1,2) + \lambda_2(1,-3) = (0,0) \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \quad - 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Donc la famille (u_1,u_2) *est libre.*

③ On sait que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et que $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 2$ donc $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^2)$.

4.4 Rang d'une famille libre

Définition 4.13 Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ et on note $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)).$$

Méthode 16 - Déterminer le rang d'une famille de vecteurs
Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on détermine la dimension de l'espace engendré par cette famille grâce à la Méthode 13.

Exemple 4.14

Exemple	Famille	Ensemble	Base	Rang
3.19	$\mathcal{F} = ((1,0),(1,1),(3,-2))$	$\mathrm{Vect}((1,0),(1,1),(3,-2))$	$((1,0),(1,1))$	$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$
3.20	$\mathcal{F} = ((2,1,0),(-1,0,1))$	$\mathrm{Vect}((2,1,0),(-1,0,1))$	$((2,1,0),(-1,0,1))$	$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$
4.7	$\mathcal{F} = ((1,1,-2),(1,-3,2))$	$\mathrm{Vect}((1,1,-2),(1,-3,2))$	$((1,1,-2),(1,-3,2))$	$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$