XXII. Probabilités sur un univers infini

1 Espace probabilisé

1.1 Univers

Définition 1.1 — Expérience aléatoire – Univers. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Elle comporte plusieurs résultats possibles, appelés **issues**.
2. On ne peut pas prévoir l'issue avant d'avoir réalisé l'expérience.

L'ensemble des issues de l'expérience est appelé **l'univers**, il est noté généralement Ω.

Lors du chapitre XV, l'univers Ω était supposé **fini**, ce n'est plus le cas dans ce chapitre. Ainsi, Ω peut maintenant être fini ou **infini**. La plupart du vocabulaire et des propriétés énoncés dans le Chapitre XV restent néanmoins encore valables. Nous allons définir ceux qui doivent être modifiés pour s'intégrer au cadre général.

Exemple 1.2

Expérience	Résultats possibles	Univers
On lance un dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.	$1,2,3,4,5,6$	$\Omega = [\![1,6]\!]$
On effectue une infinité de lancers de la même pièce et on s'intéresse au nombre de fois où on a obtenu Pile	$1,14\ldots$	$\Omega = \mathbb{N}$
On s'intéresse à la durée de vie, en heures, d'une ampoule	$6,24.5,\ldots$	$\Omega = \mathbb{R}_+$

1.2 Ensemble des évènements

On notera, dans tout le chapitre, $\mathcal{A}$ l'ensemble des événements sur notre univers Ω. Dans le cas où Ω est fini (chapitre PB1), on avait $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dans le cas général, cela ne convient pas toujours, certaines parties (les exemples ne sont pas simples) de Ω ne correspondent pas à des événements dans le sens où on ne pourra pas parler de leur probabilité. On ne cherchera donc pas à expliciter l'ensemble des événements. On a quand même quelques propriétés essentielles pour la suite :

Proposition 1.3 Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathcal{A}$ l'ensemble des événements sur l'univers.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$. (stabilité par passage au complémentaire)
3. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (stabilité par union dénombrable)

Comme pur un univers fini, on dispose de plusieurs opérations sur les évènements : le passage au complémentaire, l'union ou l'intersection d'un nombre fini d'évènements. La nouveauté ici est l'ajout de deux nouvelles opérations : l'union ou l'intersection d'un nombre infini d'évènements.

Définition 1.4 Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'univers Ω.

- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ est l'événement « au moins un des A_n est réalisé ».
- $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ est l'événement « tous les A_n sont réalisés ».

En passant au complémentaire, on obtient,

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

Exemple 1.5 On effectue une succession infinie de lancers de la même pièce et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'évènement « obtenir Pile au lancer numéro n ». Décrire les évènements suivants de manière ensembliste.

Évènement	Ensemble
« Obtenir que des Pile »	$P_1 \cap P_2 \cap \ldots = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} P_n$
« Obtenir au moins un Pile »	$P_1 \cup P_2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} P_n$
« Obtenir que des Face »	$\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{P_n}$
« Obtenir que des Pile à partir du $5^{\text{ième}}$ lancer (inclus) »	$P_5 \cap P_6 \cap \ldots = \bigcap\limits_{n=5}^{+\infty} P_n$

Exemple 1.6 Alice et Bob s'affrontent dans un jeu de pièce. Alice débute, puis chacun son tour, les joueurs lancent un pièce équilibrée. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux obtient Pile et gagne. On note,

- A « Alice gagne la partie »
- B « Bob gagne la partie »
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n « un Pile est obtenu au lancer n »
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n « la partie s'arrête juste après le lancer n »

1. Décrire les évènements A et B à l'aide des évènements A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrivons A_n à l'aide des évènements P_i pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1} \\ B &= A_2 \cup A_4 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{2k} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_n &= \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \cdots \cap \overline{P}_{n-1} \cap P_n \end{aligned}$$

Définition 1.7 — Système complet d'évènements. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i\in I}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$) telle que :

1. $\forall\, i \in I, A_i \in \mathcal{A}$ (les A_i sont des événements).
2. $\forall\, (i,j) \in I^2, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (les événements deux à deux incompatibles)
3. $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ (il est certain qu'au moins un des A_i est réalisé)

Exemple 1.8 Dans la situation de l'Exemple 1.6, la famille (A, B) ne forme pas un système complet d'évènement car il se peut que personne ne gagne (si personne obtient Pile).

1.3 Probabilité

Définition 1.9 — Univers fini. On appelle **probabilité sur Ω** toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

1. Pour tout évènement A, $P(A) \in [0,1]$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. (Additivité) Pour toute famille finie $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles, on a,

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{N} A_k\right) = \sum_{k=0}^{N} P(A_k).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est alors appelé **espace probabilisé fini** et pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ est appelé **probabilité** de A.

Définition 1.10 — Univers infini. On appelle **probabilité sur Ω** toute application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifiant :

1. Pour tout évènement A, $P(A) \in [0,1]$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. (σ-Additivité) Pour toute famille infinie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a,
   - La série $\sum P(A_n)$ converge.
   - et

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est alors appelé **espace probabilisé fini** et pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ est appelé **probabilité** de A.

! Dans le cas où les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas deux à deux disjoints, la série $\sum P(A_n)$ peut diverger !

? **Méthode 1 - Calculer la probabilité d'une union infinie lorsque les évènements sont deux à deux incompatibles**

Pour calculer la probabilité d'un évènement qui est une union infinie (cas disjoint), on peut

1. Traduire l'évènement en terme ensembliste comme une union infinie.
2. Vérifier que les évènements intervenants dans l'union sont tous deux à deux disjoints.
3. Dire que la série des probabilités des évènements intervenants dans l'union converge par σ-additivité.
4. Calculer la somme de la série des probabilités des évènements intervenants dans l'unionpour obtenir la probabilité de l'évènement initial.

Exemple 1.11 On dispose d'une grille infinie dont les lignes et les colonnes sont numérotées 1, 2,... On place un jeton au hasard dans une case et on note, pour tout $i$et j dans $\mathbb{N}^*$, $A_{i,j}$ « le jeton est placé en ligne i et en colonne j ». On suppose que

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \qquad P(A_{i,j}) = \frac{1}{\mathrm{e}2^j (i-1)!}$$

1. Calculer la probabilité de l'évènement L_1 « le jeton est placé sur la ligne 1 ».
2. Calculer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'évènement C_j « le jeton est placé sur la colonne j ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement D « le jeton est placé sur la diagonale ».

1. On remarque d'abord que

$$L_1 = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{1,j} \qquad \text{(Étape 1)}$$

Or, les évènements $(A_{1,j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles (car on ne peut pas poser simultanément un pion sur deux cases différentes) (Étape 2). Donc, par σ-additivité, la série $\sum P(A_{1,j})$ converge (Étape 3) et de plus,

$$P(L_1) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(A_{1,j}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^j} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \text{(Étape 4)}$$

2. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On remarque d'abord que

$$C_j = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{i,j} \qquad \text{(Étape 1)}$$

Or, les évènements $(A_{i,j})_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles (car on ne peut pas poser simultanément un pion sur deux cases différentes) (Étape 2). Donc, par σ-additivité, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} P(A_{i,j})$ converge (Étape 3) et de plus,

$$\begin{aligned} P(C_j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^j(i-1)!} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}2^j}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}2^j}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}2^j}\cdot \mathrm{e} \\ &= \frac{1}{2^j} \qquad \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

On remarque d'abord que

$$D = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{i,i} \qquad \text{(Étape 1)}$$

Or, les évènements $(A_{i,i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles (car on ne peut pas poser simultanément un pion sur deux cases différentes) (Étape 2). Donc, par σ-additivité, la série $\sum P(A_{i,i})$ converge (Étape 3) et de plus,

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_{i,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^i(i-1)!} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i(i-1)!} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}i!} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i i!} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{e}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}} \qquad \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Toutes les propriétés vues sont encore valables. En particulier, pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$,

- $P(\varnothing) = 0$ (probabilité de l'évènement impossible)
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (probabilité de l'évènement contraire)
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ (croissance d'une probabilité)
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ (Formule de Poincaré/du crible)

On ajuste seulement le résultat connu sur les systèmes complets d'évènements.

Proposition 1.12 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in N}$ est un système complet d'évènements, alors la série $\sum P(A_n)$ converge et sa somme vaut 1.

Définition 1.13 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Un évènement A est quasi-impossible (ou négligeable) lorsque $P(A) = 0$.
- Un évènement A est quasi-certain (ou presque-sûr) lorsque $P(A) = 1$.

2 Probabilité conditionnelle

La définition de probabilité conditionnelle, les formules des probabilités composées et de Bayes restent identiques. Petite modification sur la formule des probabilités totales qui doit être adaptée au cas où le système complet d'évènements est composé d'une infinité (dénombrable) d'évènements.

2.1 Définition d'une probabilité conditionnelle

Proposition 2.1 Soit B un événement non négligeable. L'application

$$\begin{array}{rccl} P_B : & \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelé **probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé**. Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, le réel $P_B(A)$ est appelé **probabilité de A sachant B**.

Proposition 2.2 Su B est un évènement non négligeable, alors pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, on a,

$$P(A\cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

2.2 Les trois théorèmes fondamentaux

Proposition 2.3 — Formule des probabilités totales (Univers fini).
- Soit $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement B, on a,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n \cap B).$$

- Soit $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ un système complet d'évènements non négligeables. Pour tout évènement B, on a,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Proposition 2.4 — Formule des probabilités totales (Univers infini).
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements. Pour tout évènement B, on a,
  - La série $\sum P(A_n\cap B)$
  - et
  $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B).$$
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements non négligeables. Pour tout évènement B, on a,
  - La série $\sum P(A_n)P_{A_n}(B)$
  - et
  $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Méthode 2 - Comment utiliser la formule des probabilités totales avec un système complet infini

On pense à utiliser la formule des probabilités totales lorsque l'on cherche la probabilité d'un évènement qui est conditionné par le passage d'autres évènements ; autrement dit, quand il y a plusieurs façons d'obtenir cet évènement. Pour calculer la probabilité d'un évènement B en utilisant la formule des probabilités totales, on peut

1. Repérer un système complet d'évènement (A_n).
2. En appliquant la formule des probabilités, en déduire que la série $\sum P(A_n)P_{A_n}(B)$ converge.
3. Puis calculer la somme de cette série pour avoir la probabilité de l'évènement B.

Exemple 2.5 On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et de deux urnes : l'urne U_1 contenant trois boules blanches et une boule noire, l'urne U_2 contenant une boule blanche et trois boules noires. L'expérience se déroule de la manière suivante.

- On lance la pièce de monnaie jusqu'à obtenir le premier Pile. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n « Le n-ième lancer donne Face »et A_n « Le premier Pile apparaît au n-ième lancer ».
- Puis, si l'évènement A_{n_0} est réalisé pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$, alors
  - Si n_0 est pair, on tire une boule dans U_1.
  - Si n_0 est impair, on tire une boule dans U_2.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$.
2. Montrer que la série $\sum P(A_n)$ converge et que sa somme vaut 1.
3. *On admet que la famille $(A_n)_{n\geqslant 1}$ forme un système complet d'évènement.* Calculer la probabilité de l'évènement B : « On obtient une boule blanche »

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par remarque que
$$A_n = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \overline{F}_n.$$
Or les évènements $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, \overline{F}_n$ sont mutuellement indépendants. Donc,
$$P(A_n) = P(F_1) \times P(F_2) \times \cdots \times P(F_{n-1}) \times P(\overline{F}_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3}.$$
2. Les évènements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux à deux incompatibles (Méthode 1 - Étape 2). Donc, par σ-additivité, la série $\sum P(A_n)$ converge (Méthode 1 - Étape 3) et de plus,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \qquad \text{(Méthode 1 - Étape 4)}$$
3. D'après l'énoncé, la famille $(A_n)_{n\geqslant 1}$ forme un système complet d'évènement (Méthode 2 - Étape 1). Donc, d'après la **formule des probabilités totales**, la série $\sum P(A_n)P_{A_n}(B)$ converge (Méthode 2 - Étape 2) et
$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B) \qquad \text{(Méthode 2 - Étape 3)}$$
Or,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(A_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad P_{A_n}(B) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{4} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
Donc, on en déduit que
$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{2k})P_{A_{2k}}(B) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k+1})P_{A_{2k+1}}(B) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1-1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{0}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$
On en déduit que la probabilité de l'évènement B est donnée par $\frac{3}{8}$ (Méthode 2 - Étape 3).

Proposition 2.6 — Formule de Bayes. Pour tous évènements A et B non négligeables, on a

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Proposition 2.7 — Formule des probabilités composées. Soient $A_1, \dots A_p$ une famille **finie** d'évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}) \neq 0$. Alors,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_1) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p).$$

3 Indépendance

Proposition 3.1 Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Si B n'est pas négligeable, cela revient à dire que $P_B(A) = P(A)$.

Définition 3.2 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements. On dit que les évènements A_n sont **mutuellement indépendants** lors que, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, on a,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Proposition 3.3 Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements mutuellement indépendants.

- Toute sous-famille de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
- Toute suite de la forme $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n$ ou $B_n = \bar{A}_n$, est une suite d'événements mutuellement indépendants.

4 Quelle formule et quand ?

- **Calculer la probabilité d'un contraire** – *Ou quand l'évènement est associé à une négation/comporte le mot «pas».*
  - Par passage au complémentaire, on a

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- **Calculer la probabilité d'une intersection** – *Ou quand l'évènement comporte le mot «tous».*
  - Intersection finie d'évènements mutuellement indépendants :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

  - Intersection finie d'évènements (non nécessairement indépendants) : en utilisant la formule des probabilités composées,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_1) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

  - Intersection infinie d'évènements (indépendants ou pas) : hors programme.
- **Calculer la probabilité d'une union** – *Ou quand l'évènement comporte le mot «au moins».*
  - Union de deux ou trois évènements (non nécessairement incompatibles) : formule de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

  - Union finie ou dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

  - Union finie d'évènements mutuellement indépendants : leurs contraires sont aussi mutuellement indépendants et

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k))$$

- **Calculer la probabilité d'un évènement dépendant du passé** – *Ou quand l'énoncé comporte une disjonction de cas avec l'idée d'une temporalité*
  - En utilisant la formule des probabilités totales, on a,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$$

- **Calculer la probabilité d'un évènement du passé sachant le futur**
  - En utilisant la formule de Bayes, on a,

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}.$$