TD 21 – Espaces probabilisés quelconques

Exercice 1 – Révisions Chapitre XV. On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?
5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule le soit aussi ?

Exercice 2 – On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'événement : « on obtient au moins une boule rouge ». On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- A_n : « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage »,
- B_n : « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »,
- C_n : « on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages »,
- R_n : « la n-ième boule est rouge »,

1. Calculer $P(R_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On pourra exprimer les évènements A_n, B_n et C_n en fonction des évènements R_1, R_2,...*
3. Exprimer E à l'aide des événements A_n et en déduire $P(E)$.

Exercice 3 – Un feu bicolore (rouge/vert), lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose qu'il est rouge à l'instant $t = 0$. On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$.

1. Donner r_0 et v_0.
2. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{4}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}r_n + \frac{3}{4}v_n$$
On commencera par définir proprement les événements entrant en jeu.
3. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire la valeur de r_n puis de v_n.

Exercice 4 – On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, S_k l'événement «On obtient un 6 au k-ième lancer».

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé ». Déterminer $P(A_k)$. *On pourra exprimer l'évènement A_k en fonction de S_1, S_2,...*
2. Justifier que la série $\sum P(A_k)$ converge et que sa somme est donnée par 1.
3. On appelle B l'événement : « on a obtenu la boule blanche ». En utilisant la formule des probabilités totales calculer $P(B)$. *On admettra que $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est un système complet d'événements.*
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons B_k l'événement «On obtient un 6 au plus tard au k-ième lancer». Quelle est la probabilité de l'évènement B_k ?
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ?

Pour cet exercice, on admettra que, pour $x \in [0,1[$, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{x^k}{k}$ converge et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 5 – Des boules indiscernables et en nombre infini sont placées au hasard et une à une dans deux boîtes (U et V). On place les boules indépendamment les unes des autres. Pour tout $k \geqslant 1$, on note U_k l'évènement «La k-ième boule est placée dans l'urne U» et $V_k = \overline{U}_k$, c'est-à-dire l'évènement «La k-ième boule est placée dans l'urne V».

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_k: « Les deux boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la k-ième boule» pour $k \geqslant 2$.
2. Montrer qu'il est quasi-certain que les deux boîtes deviennent non vides.

Exercice 6 – On dispose de deux pièces non discernables : la pièce A donnant Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On réalise l'expérience suivante :

- Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard et on la lance.
- Ensuite, si on obtient Pile on garde la même pièce pour le lancer suivant;
- si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.
- On réalise ainsi une infinité de lancers.

On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'événement « le k-ième lancer se fait avec la pièce A»,$B_k = \overline{A_k}$ et E_k l'événement « le k-ième lancer amène Pile».

1. Trouver une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.
3. En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.