

TD 20 – L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

1 Combinaisons linéaires

Exercice 1 – Exemple 1.7. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $u = (7, 2, -6)$, $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 .
2. Soient $u = (1, 1, 1)$, $u_1 = (1, 1, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 0)$. Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2 .

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 2 – Méthodes 1 & 2, Exemples 2.2, 2.3, 2.4 & 2.5. Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace E ? Justifier.

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^2$$

$$F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^4$$

$$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

3 Sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs

Exercice 3 – Méthode 3, Exemple 2.7. Soit $G = \text{Vect}((1, -1, -1), (-6, 1, 4))$. Les vecteurs $v_1 = (1, 4, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$ appartiennent-ils à G ?

Exercice 4 – Méthode 4, Exemple 2.11. Exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que F_1 soit l'espace engendré par cette famille. Faire de même pour les espaces F_4 et F_5 .

Exercice 5 – Méthode 5, Exemple 2.12.

1. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1, 2, 3)$. Soit $G_1 = \text{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_1 .
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$. Soit $G_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_2 .
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Soit $G_3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_3 .

4 Familles génératrices

Exercice 6 – Méthode 6, Exemples 3.3 & 3.4.

1. Montrer que $((1, 2), (0, -1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 – Méthode 7, Exemple 3.5.

1. Montrer que $F_5 = \{(t, 4t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_7 = \{(a, a+b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
3. Montrer que $F_8 = \{(a+b, a-2b, 3b-a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 8 – Méthode 7, Exemple 3.6.

1. Montrer que $F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_{10} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

5 Familles libres

Exercice 9 – Méthode 8, Exemple 3.10. Montrer que $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 – Méthodes 8 & 9, Exemples 3.10, 3.11, 3.12 & 3.13. Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)$
2. $u_1 = (0, 1, -1), u_2 = (1, 0, -1), u_3 = (1, -1, 0)$
3. $u_1 = (0, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 1)$
4. $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 1, 1), u_4 = (1, 1, 1)$

Exercice 11 – Soient $u = (1, 1, m)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (1, 0, 3)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la famille (u, v, w) soit libre.

6 Bases

Exercice 12 – Méthode 10, Exemple 3.16.

1. Montrer que la famille $((1, 2), (-1, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $((1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 – Méthode 11, Exemple 3.18. On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 0, 3)$, $u_3 = (1, 2, 3)$ et $u_4 = (-2, -4, 1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice 14 – Méthode 12, Exemple 3.19. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$
2. $G_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$
3. $G_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$
4. $G_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$

7 Pour aller plus loin

Exercice 15 – Soient

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \\ G &= \{(b - 2a, a + 2b, a + b) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}\} \\ H &= \text{Vect}\left((1, 5, 1), (2, 1, -1), (-1, 4, 2)\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. Déterminer une base de H .
4. Déterminer une équation cartésienne définissant G .
5. Déterminer une base de $F \cap G$.
6. Démontrer que $H = F$.

Exercice 16 – Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2)$, $u_3 = (1, 3, 3)$ et $u_4 = (1, -1, -1)$. Montrer que

$$\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_3, u_4).$$

Exercice 17 – Soit $n \geq 2$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère F la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par,

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $u_i = e_i - e_n$. Montrer que

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$$