TD 19 – Dérivabilité d'une fonction

Étude locale de la dérivée

Exercice 1 – Preuve de la formule de dérivée pour la fonction inverse. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

1. Montrer que

$$\forall x, a \in \mathbb{R}^*, x \neq a, \qquad \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{ax}$$

Soient $x, a \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} &= \frac{\frac{a}{xa} - \frac{x}{xa}}{x-a} \\
&= \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} \\
&= \frac{a-x}{xa} \times \frac{1}{x-a} \\
&= \frac{-(x-a)}{xa} \times \frac{1}{x-a} \\
&= -\frac{1}{ax}
\end{aligned}$$

2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable au point a et que

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$. Le taux d'accroissement de f en a est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x \neq a, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{ax}$$

en utilisant la question précédente. Donc, en passant à la limite, on obtient,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = -\frac{1}{a^2} \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en a et

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Exercice 2 – Preuve de la formule de dérivée pour la fonction cube. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3$$

1. Montrer que

$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \qquad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

Soient $x, a \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
(x-a)(x^2+ax+a^2) &= x^3 + ax^2 + a^2x - ax^2 - a^2x - a^3 \\
&= x^3 - a^3
\end{aligned}$$

2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable au point a et que

$$f'(a) = 3a^2.$$

Soient $a \in \mathbb{R}$. Le taux d'accroissement de f en a est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq a, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{x^3 - a^3}{x-a} = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a} = x^2 + ax + a^2$$

en utilisant la question précédente. Donc, en passant à la limite, on obtient,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = 3a^2 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en a et

$$f'(a) = 3a^2.$$

Exercice 3 – Preuve de la formule de dérivée pour les fonctions puissances. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^n$$

1. Montrer que

$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \qquad x^n - a^n = (x-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k$$

2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable au point a et que

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

Exercice 4 – Taux d'accroissements. À l'aide du taux d'accroissement, déterminer si les fonctions suivantes sont-elles dérivables au point indiqué.

i) $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$ en 0 ii) $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en 1 iii) $h(x) = \sqrt{x+2}$ en -2

i) On sait que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{2x}{1-x}$$

Donc, le taux d'accroissement de f en 0 à droite vaut

$$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{2x}{1-x} - 0}{x-0} = \frac{2}{1-x}$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$$

On sait aussi que

$$\forall x < 0, \qquad f(x) = \frac{2x}{1+x}$$

Donc, le taux d'accroissement de f en 0 à gauche vaut

$$\forall x < 0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{2x}{1+x} - 0}{x-0} = \frac{2}{1+x}$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$$

Donc, f admet une dérivée à droite et à gauche en 0 qui valent la même chose, donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 2$$

ii) De même,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2 - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x-1 = 0$$

et

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1-0}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1$$

Donc, f admet une dérivée à droite et à gauche en 1 mais elles ne valent pas la même chose, donc f n'est pas dérivable en 1.

iii) Le taux d'accroissement de f en -2 (à droite, le seul qui a un sens) vaut :

$$\forall x > -2, \qquad \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Donc,

$$\lim_{x \to (-2)^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en -2.

Exercice 5 – Taux d'accroissements. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2 - x|$$

1. Dresser le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x^2 - x$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. En déduire une expression de f sans valeur absolue (mais par morceaux).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\\ -x^2 + x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

3. Étudier la dérivabilité en 1 de la fonction f.

On a,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

et

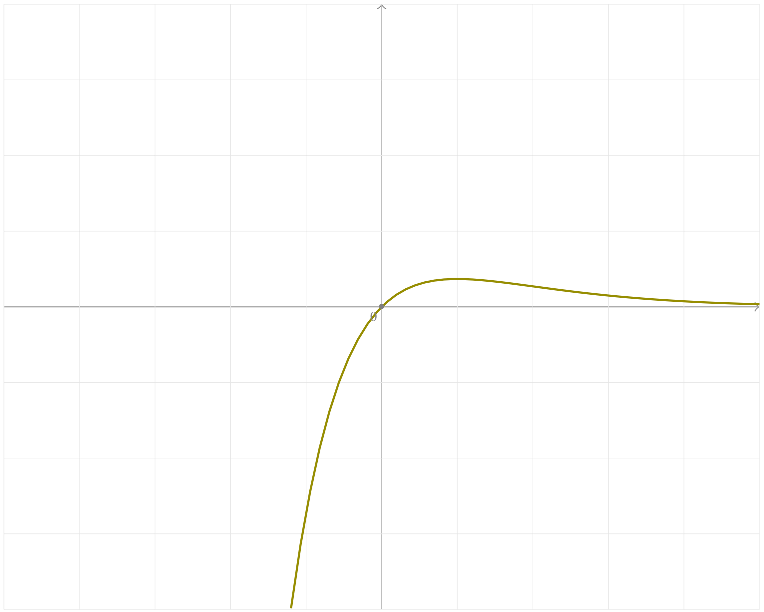
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 + x - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -x = -1$$

Donc, f admet une dérivée à droite et à gauche en 1 mais elles ne valent pas la même chose, donc f n'est pas dérivable en 1.

Exercice 6 – Interprétation graphique de la dérivée. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x e^{-x}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 0 et 1 dont on donnera les équations.



Exercice 7 – Calculs de limites grâce à la dérivabilité. En vous appuyant sur la dérivabilité des fonctions usuelles, calculer les limites suivantes.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ iii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^{12}-1}{h}$ iv) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^{12}-1}{e^h-1}$

i) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en $a=0$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

ii) La fonction $g : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $a=0$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

iii) La fonction $j : x \mapsto x^{12}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $a=1$ donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{j(1+h)-g(1)}{h} = j'(1) \qquad \text{c-à-d} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{12}-1}{h} = 12$$

iv) On peut reconnaître le produit de deux taux d'accroissement de la manière suivante,

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{(1+h)^{12}-1}{e^h-1} = \frac{(1+h)^{12}-1}{h} \times \frac{h}{e^h-1}$$

Donc, en utilisant les questions ii) et iii), on obtient,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{12}-1}{e^h-1} = 12 \times \frac{1}{1} = 12$$

Étude globale de la dérivée

Exercice 8 – On considère la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$$

Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner sa dérivée sur $[0,+\infty[$.

① **Dans un premier temps, on donne l'ensemble de définition de la fonction f.** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$. De plus,

$$\forall x > 0, \qquad 1+\sqrt{x} > 0.$$

Comme la fonction logarithme est définie sur $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$ est définie sur $[0,+\infty[$. Finalement, par produit, la fonction f est définie sur $[0,+\infty[$.

② **Dans un second temps, on étudie la dérivabilité.**

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x > 0, \qquad 1+\sqrt{x} > 0.$$

De plus, la fonction logarithme est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc par **composée** et par **produit**, la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

- Étudions la dérivabilité en 0 via le **taux d'accroissement**.

$$\forall x > 0, \; \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \in \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

- Finalement, la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

③ **Enfin, on calcule la dérivée là où elle est définie.**

- Pour $x = 0$, $f'(0) = 1$.
- Sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x > 0, \; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x}) + \sqrt{x} \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{x})}.$$

Exercice 9 – On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner sa dérivée sur $[0,+\infty[$.

- Sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = x^2 \times \ln(x)$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, par produit, la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) = x(1+2\ln(x))$$

- Dérivabilité en 0 via le **taux d'accroissement**.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\ln(x)-0}{x-0} = x\ln(x) \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R} \text{ (par c.c.)}$$

Donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0$$

- Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} x(1+2\ln(x)) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Exercice 10 – Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f, son domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$ puis calculer l'expression de f'.

i) $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$ iii) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ v) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

i)
- Domaine de définition : $\mathbb{R}$
- Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$.
- Dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (2x^2+1)e^{x^2+1}$$

ii)
- Domaine de définition : $]0,+\infty[\setminus\{1\}$
- Domaine de dérivabilité : $]0,+\infty[\setminus\{1\}$
- Dérivée :

$$\forall x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}, \qquad f(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$$

iii)
- Domaine de définition : $[-1,1]$
- Domaine de dérivabilité : $]-1,1[$
- Dérivée :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 11 – Déterminer les valeurs a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable (donc continue) sur $]0,1[$ (car fonction racine carrée) et sur $]1,+\infty[$ (fonction polynomiale). Il reste à étudier la dérivabilité et la continuité en 1.

- Étude de la continuité en 1. On a $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$$

Donc f est continue en 1 si et seulement si

$$a + b + 1 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a + b = 0$$

- Étude de la dérivabilité en 1. On a,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

et de même,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2 + bx + 1 - (a + b + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} a(x+1) + b = 2a + b$$

Donc f est dérivable en 1 si et seulement si

$$2a + b = \frac{1}{2}$$

Donc, f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 12 – Dérivée d'une fonction réciproque. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = xe^x$$

1. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

On peut donc en déduire le tableau de signe de f' et donc le tableau de variations de f de la manière suivante.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Déterminer la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :'

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

c'est-à-dire (en calculant $f(0)$ et $f'(0)$),

$$y = x$$

3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

On a :

- On travaille sur l'intervalle $[-1,+\infty[$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur $[-1,+\infty[$.
- D'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.
- (On peut calculer que $f(-1) = -e^{-1}$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

Donc, d'après le **théorème de la bijection**,

la fonction f réalise une $\boxed{\text{bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } J = [-e^{-1},+\infty[}$.

4. On note $g : J \to [-1,+\infty[$ sa bijection réciproque. Montrer que g est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$ et que,
$$\forall x > -e^{-1},\ x \neq 0, \qquad g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}$$

La fonction f est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et sa dérivée f' ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$. Donc, en tant que bijection réciproque, la fonction $g = f^{-1}$ est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$. De plus, en tant que fonction réciproque, on sait que
$$\forall x \in J, \qquad f(g(x)) = x$$
c'est-à-dire,
$$\forall x \in J, \qquad g(x) \times \exp(g(x)) = x$$
Donc, en dérivant cette expression, on obtient,
$$\forall x \in J, \qquad g'(x) \times \exp(g(x)) + g(x) \times g'(x) \times \exp(g(x)) = 1$$
et donc,
$$\forall x \in]-e^{-1},+\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{\exp(g(x)) + g(x)\exp(g(x))} = \frac{1}{\exp(g(x))(1+g(x))}$$
Or,
$$\forall x \in J, \qquad g(x) \times \exp(g(x)) = x \qquad \text{c-à-d} \qquad \forall x \in J, \qquad \exp(g(x)) = \frac{x}{g(x)}$$
On n'obtient donc,
$$\forall x \in]-e^{-1},+\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{\exp(g(x)) + g(x)\exp(g(x))} = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}$$

Exercice 13 – Dérivée d'une fonction réciproque. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par,
$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = e^x - 2e^{-x}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur J.
3. Que valent $f^{-1}(-1)$ et $(f^{-1})'(-1)$?
4. Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \qquad f'(x)^2 = f(x)^2 + 8$$
5. En déduire que,
$$\forall y \in J, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+8}}$$

Dérivées successives

Exercice 14 – On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

- Sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = x^2 \times \ln(x)$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortori sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, par produit, la fonction f est dérivable et donc continue sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) = x(1+2\ln(x))$$

- Dérivabilité en 0 via le **taux d'accroissement**.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\ln(x)-0}{x-0} = x\ln(x) \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R} \text{ (par c.c.)}$$

Donc f est dérivable et donc continue en 0 et

$$f'(0) = 0$$

Finalement, la fonction f est dérivable (et continue) sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} x(1+2\ln(x)) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On sait déjà que la fonction est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$. Pour montrer le caractère $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, il reste à étudier la continuité de la dérivée, donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} x(1+2\ln(x)) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Par opérations, la fonction f' est continue sur $]0,+\infty[$. Il reste à étudier la continuité en 0. Or,

$$f'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x+2x\ln(x) = 0 \text{ par c.c.}$$

Donc f' est aussi continue en 0. Finalement, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

4. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Regardons le taux d'accroissement de f' en 0 :

$$\forall x>0, \qquad \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{x+2x\ln(x)-0}{x-0} = 1+2\ln(x)$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = -\infty$$

La fonction f' n'est pas dérivable en 0, c'est-à-dire la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 15 – On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [1,+\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x-1} \times \ln(x).$$

Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

Exercice 16 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,1[$.

   La fonction $x \mapsto x-1$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc par passage à l'inverse, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. De même, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \;\; f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

   Récurrence.

Exercice 17 – Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^p,$$

après avoir justifier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction.

La fonction f est polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- Si $n \leqslant p$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$$
- et si $n > p$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 0$$

Exercice 18 – On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{2x}$$

Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[2^n(x^2+1) + 2^n nx + n(n-1)2^{n-2}\right]$$

Pour aller plus loin

Exercice 19 – Etude globale d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
2. Justifier que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?
4. Étudier la parité de f.
5. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) - x$. Interpréter ce résultat.
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note toujours f ce prolongement.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

5. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.