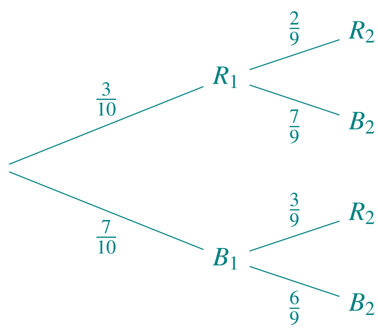
TD 21 – Espaces probabilisés quelconques

Exercice 1 – Révisions Chapitre XV. On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?
5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule le soit aussi ?

Correction. Pour tout $k \in \{1,2\}$, notons R_k l'évènement «Obtenir un boule rouge au k-ième lancer» et $B_k = \overline{R_k}$, c'est-à-dire l'évènement «Obtenir un boule noire au k-ième lancer». On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant.



1. *On cherche à calculer $P(R_1)$.* D'après l'énoncé, comme au premier tirage, la probabilité de tirer chaque boule est **uniforme**, on a
$$P(R_1) = \frac{3}{10}.$$
2. *On cherche à calculer $P(R_1 \cap R_2)$.* D'après la **formule des probabilités composées**, on a,
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$
3. *On cherche à calculer $P(R_2)$.* Comme (R_1, B_1) est un **système complet d'évènements**, d'après la **formule des probabilités totales**, on a
$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{7}{30} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$
4. *On cherche à calculer $P(R_1 \cup R_2)$.* En utilisant la **formule du crible**, on a
$$\begin{aligned} P(R_1 \cup R_2) &= P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} \\ &= \frac{8}{15}, \end{aligned}$$
en utilisant les valeurs trouvées aux questions 1, 2 et 3.
5. *On cherche à calculer $P_{R_2}(R_1)$.* D'après la **formule de Bayes**, on a
$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}.$$

■

Exercice 2 – On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'événement : « on obtient au moins une boule rouge ». On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- A_n : « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage »,
- B_n : « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »,
- C_n : « on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages »,
- R_n : « la n-ième boule est rouge »,

1. Calculer $P(R_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On pourra exprimer les évènements A_n, B_n et C_n en fonction des évènements R_1, R_2,...*
3. Exprimer E à l'aide des événements A_n et en déduire $P(E)$.

Correction.

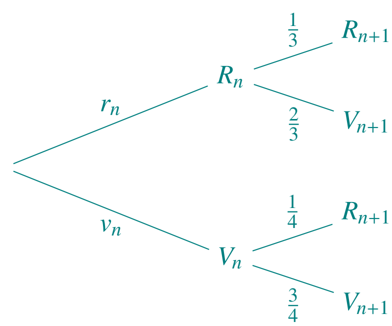
1. Comme les tirages sont effectués avec remise, à chaque tirage, l'urne contient deux boules vertes et une boule rouge. De plus, les tirages sont **uniformes**. Donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(R_n) = \frac{1}{3} \qquad \left(\text{et} \qquad P(\overline{R}_n) = \frac{2}{3}\right)$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - On peut commencer par remarquer que
   $$A_n = \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \cdots \cap \overline{R}_{n-1} \cap R_n.$$
   Or les évènements $(R_1, \ldots R_n)$ sont mutuellement **indépendants** car les tirages sont effectués avec remise et donc les évènements $(\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_{n-1}, R_n)$ aussi. Ainsi,
   $$P(A_n) = P(\overline{R}_1) \times P(\overline{R}_2) \times \cdots \times P(\overline{R}_{n-1}) \times P(R_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
   - On peut commencer par remarque que
   $$C_n = \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \cdots \cap \overline{R}_{n-1} \cap \overline{R}_{n-1}.$$
   Donc, par **indépendance**, on a
   $$P(C_n) = P(\overline{R}_1) \times P(\overline{R}_2) \times \cdots \times P(\overline{R}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
   - Enfin, on peut remarque que
   $$B_n = \overline{C}_n$$
   Donc, en passant au **complémentaire**, on obtient que,
   $$P(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
3. On peut commencer par remarque que
$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$
Or les évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont **deux à deux incompatibles**, donc, d'après la **σ-additivité**, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)$ converge et
$$P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

■

Exercice 3 – Un feu bicolore (rouge/vert), lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lorsqu'il est vert passe au rouge avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose qu'il est rouge à l'instant $t = 0$. On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$.

1. Donner r_0 et v_0.
2. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{4}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}r_n + \frac{3}{4}v_n$$
On commencera par définir proprement les événements entrant en jeu.
3. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire la valeur de r_n puis de v_n.

Correction. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n l'évènement « Le feu est au rouge à l'instant n » et $V_n = \overline{R_n}$, c'est-à-dire l'évènement « Le feu est au vert à l'instant n ». D'après l'énoncé, la situation entre l'instant n et l'instant $n+1$ peut être modélisée par l'arbre de probabilité suivant,



1. D'après l'énoncé, à l'instant $n = 0$, le feu est au rouge donc
$$r_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad v_0 = 0.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (R_n, V_n) forme un **système complet d'évènements**, d'après la **formule des probabilités totales**, on a
$$\begin{aligned} P(R_{n+1}) &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{3} + v_n \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$
De la même manière,
$$\begin{aligned} P(V_{n+1}) &= P(R_n) \times P_{R_n}(V_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) \\ &= \frac{2}{3}r_n + \frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

On peut remarquer, en passant au **complémentaire**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 1 - v_n$. Donc, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{4}v_n = \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{4}(1 - r_n) = \frac{1}{12}r_n + \frac{1}{4}.$$

À ce stade, on reconnaît que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithméco-géométrique**.

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithméco-géométrique**.

- On commence par résoudre l'équation $\ell = \frac{1}{12}\ell + \frac{1}{4}$ d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :
$$\ell = \frac{1}{12}\ell + \frac{1}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad 12\ell = \ell + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \frac{3}{11}$$

- Ensuite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r_n - \frac{3}{11}$ et on montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= r_{n+1} - \frac{3}{11} \\ &= \frac{1}{12} r_n + \frac{1}{4} - \frac{3}{11} \\ &= \frac{1}{12} r_n - \frac{1}{44} \\ &= \frac{1}{12}\left(r_n - \frac{3}{11}\right) \\ &= \frac{1}{12} u_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $u_0 = r_0 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$. On en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

- Finalement, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = u_n + \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{3}{11}$$

puis que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = 1 - r_n = \frac{8}{11} - \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

■

Exercice 4 – On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, S_k l'événement «On obtient un 6 au k-ième lancer».

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé ». Déterminer $P(A_k)$. *On pourra exprimer l'évènement A_k en fonction de S_1, S_2,...*
2. Justifier que la série $\sum P(A_k)$ converge et que sa somme est donnée par 1.
3. On appelle B l'événement : « on a obtenu la boule blanche ». En utilisant la formule des probabilités totales calculer $P(B)$. *On admettra que $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est un système complet d'événements.*
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons B_k l'événement «On obtient un 6 au plus tard au k-ième lancer». Quelle est la probabilité de l'évènement B_k ?
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ?

Pour cet exercice, on admettra que, pour $x \in [0,1[$, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{x^k}{k}$ converge et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Correction.

1. On peut remarquer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad A_k = \overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \cdots \cap \overline{S}_{n-1} \cap S_n$$
Or les lancers de dés sont indépendants, c'est-à-dire que les évènements $(\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_{n-1}, S_n)$ sont **mutuellement indépendants**, donc
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(A_k) = P(\overline{S}_1) \times \cdots P(\overline{S}_{n-1}) \times P(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$
2. Les évènements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont **deux à deux incompatibles** donc par **σ-additivité**, la série $\sum P(A_k)$ converge *(on peut aussi justifier la converge de cette série en reconnaissant une série géométrique)* et sa somme est donnée par
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.On peut commencer par remarquer que
$$B_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k.$$
Or les évènements $(A_i)_{i=1,\ldots k}$ sont **deux à deux incompatibles** donc par **σ-additivité**,
$$P(B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i} = \frac{1}{6} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k}{1-\frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$$
4. La famille $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un **système complet d'évènements non négligeables** donc d'après la **formule des probabilités totales**, la série $\sum P(A_k) P_{A_k}(B)$ converge et
$$P(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) P_{A_k}(B)$$
Or,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$$
De plus, si A_k est réalisé pour un certain k, alors l'urne contient la boule blanche de départ et $k-1$ boules rouges rajoutées lors des $k-1$ premiers tirages où l'on a pas obtenu de six. Ainsi,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{A_k}(B) = \frac{1}{k}$$
Finalement,
$$P(B) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \frac{1}{k} = -\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{\ln(6)}{5}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. *On cherche à calculer $P_{B_{2k}}(\overline{B}_k)$.* Par définition d'une **probabilité conditionnelle**, on a

$$P_{B_{2k}}(\overline{B}_k) = \frac{P(\overline{B}_k \cap B_{2k})}{P(B_{2k})}.$$

Or, d'après la question précédente, on a directement que

$$P(B_{2k}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}$$

De plus, on peut remarquer que

$$\overline{B}_k \cap B_{2k} = A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \cdots A_{2k}$$

Or les évènements $(A_i)_{i=k+1,\ldots 2k}$ sont **deux à deux incompatibles** donc par **σ-additivité**,

$$\begin{aligned}
P(\overline{B}_k \cap B_{2k}) &= \sum_{i=k+1}^{2k} P(A_i) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=k+1}^{2k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=k}^{2k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i} \\
&= \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k}{1-\frac{5}{6}} \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned}
P_{B_{2k}}(\overline{B}_k) &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k} \times \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)}{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^k\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k}}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^k} \\
&= \frac{5^k}{5^k+6^k}
\end{aligned}$$

■

Exercice 5 – Des boules indiscernables et en nombre infini sont placées au hasard et une à une dans deux boîtes (U et V). On place les boules indépendamment les unes des autres. Pour tout $k \geqslant 1$, on note U_k l'évènement «La k-ième boule est placée dans l'urne U» et $V_k = \overline{U}_k$, c'est-à-dire l'évènement «La k-ième boule est placée dans l'urne V».

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_k: « Les deux boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la k-ième boule» pour $k \geqslant 2$.
2. Montrer qu'il est quasi-certain que les deux boîtes deviennent non vides.

Correction.

1. Soit $k \geqslant 2$. Pour que les deux boîtes soient non vides exactement au tour k, il y a deux possibilités,
   - soit les $k-1$ premières boules vont toutes dans l'urne U et la k-ième boule va dans l'urne V,
   - soit les $k-1$ premières boules vont toutes dans l'urne V et la k-ième boule va dans l'urne U.

   Cela revient à dire que
   $$A_k = (U_1 \cap \cdots \cap U_{k-1} \cap V_k) \cup (V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap U_k).$$
   Comme l'**union** est **disjointe**, on obtient que
   $$P(A_k) = P(U_1 \cap \cdots \cap U_{k-1} \cap V_k) + P(V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap U_k)$$
   Or les boules sont placées indépendamment les unes des autres ce qui veut dire que les évènements $(U_1, \dots, U_{k-1}, V_k)$ sont **mutuellement indépendants**. De plus, les boîtes sont choisies de manière **uniforme** donc
   $$P(U_1 \cap \cdots \cap U_{k-1} \cap V_k) = P(U_1) \times \cdots \times P(U_{k-1}) \times P(V) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
   De même, on obtient que
   $$P(V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap U_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
   Donc, finalement, on obtient que
   $$P(A_k) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
2. Notons A l'évènement « Les deux boîtes sont non vides ». Alors, on peut remarquer que
   $$A = \bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k.$$
   Or les évènements $(A_k)_{k \geqslant 2}$ sont **deux à deux incompatibles** donc par **σ-additivité**, la série $\sum P(A_k)$ converge et
   $$P(A) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$
   Donc $P(A) = 1$, c'est-à-dire l'évènement A est quasi-certain.

■

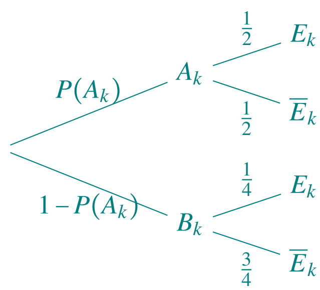
Exercice 6 – On dispose de deux pièces non discernables : la pièce A donnant Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la pièce B donnant Pile avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On réalise l'expérience suivante :

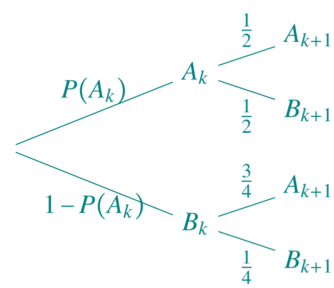
- Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard et on la lance.
- Ensuite, si on obtient Pile on garde la même pièce pour le lancer suivant;
- si on obtient Face, on change de pièce pour le lancer suivant.
- On réalise ainsi une infinité de lancers.

On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k l'événement « le k-ième lancer se fait avec la pièce A», $B_k = \overline{A_k}$ c'est-à-dire l'évènement « le k-ième lancer se fait avec la pièce B» et E_k l'événement « le k-ième lancer donne Pile». Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixe dans tout cet exercice.

1. Trouver une relation entre $P(E_k)$ et $P(A_k)$.
2. Trouver une relation entre $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.
3. En déduire $P(A_k)$ puis $P(E_k)$.

Correction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On peut résumer la situation grâce aux deux arbres de probabilité suivants.





1. Comme (A_k, B_k) est un **système complet d'évènements**, d'après la **formule des probabilités totales**, on a
$$\begin{aligned} P(E_k) &= P(A_k)P_{A_k}(E_k) + P(B_k)P_{B_k}(E_k) \\ &= P(A_k) \times \frac{1}{2} + (1-P(A_k)) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}P(A_k) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$
2. Comme (A_k, B_k) est un **système complet d'évènements**, d'après la **formule des probabilités totales**, on a
$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(A_k)P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(A_{k+1}) \\ &= P(A_k) \times \frac{1}{2} + (1-P(A_k)) \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}P(A_k) \end{aligned}$$
3. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = P(A_k)$. Alors, d'après la question 2, la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad a_{k+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}a_k,$$
c'est-à-dire que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite **arithmético-géométrique**. De plus, comme le choix de la première pièce est uniforme,
$$a_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$$
Ainsi, en appliquant la méthode permettant de déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique, on obtient,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad a_k = P(A_k) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$
Puis, finalement, en utilisant la relation trouvée à la question 1, on obtient que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(E_k) = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{k}$$

■