# TD 20 – L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

## 1 Combinaisons linéaires

**Exercice 1 –** ***Exemple 1.7.*** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soient $u = (7,2,-6)$, $u_1 = (2,1,-1)$, $u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (0,1,2)$. Montrer que $u$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2$ et $u_3$.
2. Soient $u = (1,1,1)$, $u_1 = (1,1,2)$ et $u_2 = (1,-1,0)$. Montrer que $u$ n'est pas une combinaison linéaire de $u_1$ et $u_2$.

*Correction.*

1. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
u = au_1 + bu_2 + cu_3 \quad & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & b & & & = & 7 \\ a & + & b & + & c & = & 2 \\ -a & + & b & + & 2c & = & -6 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} a & + & b & + & c & = & 2 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2a & + & b & & & = & 7 & \\ -a & + & b & + & 2c & = & -6 & \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} a & + & b & + & c & = & 2 & \\ & - & b & - & 2c & = & 3 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & 2b & + & 3c & = & -4 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} a & + & b & + & c & = & 2 & \\ & - & b & - & 2c & = & 3 & \\ & & & - & c & = & 2 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 3 \\ b & = & 1 \\ c & = & -2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$u = 3 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 - 2 \cdot u_3$$

et donc $u$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

2. Supposons par l'absurde que $u$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1$ et $u_2$. Alors, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $u = au_1 + bu_2$. Donc, les réels $a$ et $b$ sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 1 \\ a & - & b & = & 1 \\ 2a & & & = & 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} b & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ a & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

C'est donc absurde. Ainsi, $u$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $u_1$ et $u_2$.

■

## 2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

**Exercice 2 – Méthodes 1 & 2, *Exemples 2.2, 2.3, 2.4 & 2.5*.** Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace $E$ ? Justifier.

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 1\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^2$$

$$F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3y+z = 0\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^4$$

$$F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z = 0 \text{ et } 3x-y+z = 0\right\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

*Correction.*

- Montrons que $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  ① $F_1$ est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$.
  ② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartient à $F_1$ car $0+0-2\times 0 = 0$.
  ③ Soient $u = (x_1,y_1,z_1)$ et $v = (x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de $F_1$, c'est-à-dire deux éléments de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient
  $$x_1+y_1-2z_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2+y_2-2z_2 = 0$$
  et soient $a$ et $b$ deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au+bv$ est dans $F_1$.
  - Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au+bv$ est donné par
  $$au+bv = a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2) = (ax_1+bx_2, ay_1+by_2, az_1+bz_2) = (X,Y,Z).$$
  - Montrons que $au+bv \in F_1$, c'est-à-dire que
  $$X+Y-2Z = 0.$$
  En utilisant le fait que $u$ et $v$ sont dans $F_1$, on obtient que
  $$\begin{aligned} X+Y-2Z &= ax_1+bx_2+ay_1+by_2-2(az_1+bz_2) \\ &= a(x_1+y_1-2z_1)+b(x_2+y_2-2z_2) \\ &= a\cdot 0+b\cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Donc $au+bv \in F_1$.

  Finalement, $\boxed{F_1 \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

- L'ensemble $\boxed{F_2 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ car l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ n'appartient pas à $F_2$ car $0+0-2\times 0 \neq 1$.

- L'ensemble $\boxed{F_3 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire. En effet, l'élément $(1,1)$ appartient à $F_3$ (car $1^2 = 1$) et l'élément $(-1,1)$ aussi (car $1 = (-1)^2$). Pourtant, l'élément $(1,1)+(-1,1) = (0,1)$ n'appartient pas à $F_3$ car $1 \neq 0^2$.

- On montre que $\boxed{F_4 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.}$

- On montre que $\boxed{F_5 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

■

# 3 Sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs

**Exercice 3 – Méthode 3, *Exemple 2.7*.** Soit $G = \text{Vect}((1,-1,-1),(-6,1,4))$. Les vecteurs $v_1 = (1,4,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$ appartiennent-ils à $G$ ?

*Correction*.

- Montrons que $v_1 = (1,4,1) \in G$, c'est-à-dire trouvons deux réels $a$ et $b$ tels que

$$v_1 = a(1,-1,-1) + b(-6,1,4).$$

Pour trouver les coefficients $a$ et $b$, on peut résoudre le système donné par l'égalité au-dessus. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$v = a(1,-1,-1) + b(-6,1,4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -a + b = 4 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = 5 \\ -2b = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient que

$$v_1 = -5(1,-1,-1) - (-6,1,4).$$

Et donc que $\boxed{v_1 \text{ appartient à } G.}$

Montrons que $v_2 = (-1,0,1) \notin G$. Supposons par l'absurde que $v_1 \in G$. Alors, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que

$$v_2 = a(1,-1,-1) + b(-6,1,4),$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a - 6b = -1 \\ -a + b = 0 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = -1 \\ -2b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 6b = 1 \\ b = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles. C'est absurde. Donc $\boxed{v_2 \text{ n'appartient pas à } G.}$ ■

**Exercice 4 – Méthode 4, *Exemple 2.11*.** Exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que $F_1$ soit l'espace engendré par cette famille. Faire de même pour les espaces $F_4$ et $F_5$.

*Correction.*

- Soit $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y-2z=0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple $x$ - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici $y$ et $z$.

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-y+2z \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_1 \quad &\Leftrightarrow \quad u=(-y+2z,y,z) && \text{(Étape 4)} \\ &\Leftrightarrow \quad u=y(-1,1,0)+z(2,0,1) && \text{(Étape 5)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \text{Vect}((-1,1,0),(2,0,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_1 = \text{Vect}((-1,1,0),(2,0,1)).}$$

Ceci redémontre au passage que $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On montre de même que

$$\boxed{F_4 = \text{Vect}((1,0,-2,0),(0,1,-3,0),(0,0,0,1)).}$$

- Soit $F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0 \text{ et } 3x-y+z=0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a deux équation pour trois inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple $x$ et $y$ - que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante - ici $z$.

$$u \in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & - & 7y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{4}{7}z \\ y & = & -\frac{5}{7}z \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_5 \quad &\Leftrightarrow \quad u=\left(-\tfrac{4}{7}z,-\tfrac{5}{7}z,z\right) && \text{(Étape 4)} \\ &\Leftrightarrow \quad u=z\left(-\tfrac{4}{7},-\tfrac{5}{7},1\right) && \text{(Étape 5)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \text{Vect}\left(\left(-\tfrac{4}{7},-\tfrac{5}{7},1\right)\right) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_5 = \text{Vect}\left(\left(-\tfrac{4}{7},-\tfrac{5}{7},1\right)\right)}$$

Ceci redémontre au passage que $F_5$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

■

**Exercice 5 – Méthode 5, *Exemple 2.12*.**

1. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1,2,3)$. Soit $G_1 = \text{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation·s définissant $G_1$.
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-1,0,1)$. Soit $G_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Trouver un système d'équation·s définissant $G_2$.
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$ Soit $G_3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Trouver un système d'équation·s définissant $G_2$.

*Correction.*

1. Soit $G_1 = \text{Vect}((1,2,3))$. Trouvons un système d'équation·s définissant $G_1$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G_1 &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad a(1,2,3) = u && \text{(Étape 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a = x \\ 2a = y \\ 3a = z \end{cases} && \text{(Étape 2)} \end{aligned}$$

- Si $y = 2x$ et $z = 3x$ alors ce système admet bien une solution.
- Si $y \neq 2x$ ou $z \neq 3x$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

Finalement,

$$u \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x \quad \text{et} \quad z = 3x. \qquad \text{(Étape 3)}$$

Donc

$$\boxed{G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \ \text{ et } \ z = 3x\}} \qquad \text{(Étape 4)}$$

2. Soit $G_2 = \text{Vect}((1,2,3),(-1,0,1))$. Trouvons un système d'équation·s définissant $G_2$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G_2 &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a(1,2,3) + b(-1,0,1) = u && \text{(Étape 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a - b = x \\ 2a = y \\ 3a + b = z \end{cases} && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} b = \frac{y}{2} - x \\ a = \frac{y}{2} \\ b = z - \frac{3y}{2} \end{cases} && \text{(Étape 2)} \end{aligned}$$

- Si $\frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2}$ alors ce système admet bien une solution.
- Si $\frac{y}{2} - x \neq z - \frac{3y}{2}$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

Finalement,

$$u \in G_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y - 2x = 2z - 3y \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0 \quad \text{(Étape 3)}$$

Donc

$$\boxed{G_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}} \qquad \text{(Étape 4)}$$

3. On montre de même que $\boxed{G_3 = \mathbb{R}^3.}$

■

# 4 Familles génératrices

**Exercice 6 – Méthode 6, *Exemples 3.3 & 3.4.***

1. Montrer que $((1,2),(0,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

*Correction.*

1. Soient $e_1 = (1,2)$ et $e_2 = (0,-1)$. Montrons que $(e_1, e_2)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
   ① Les vecteurs $e_1$ et $e_2$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$.
   ② Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe $a$ et $b$ deux réels tels que $u = ae_1 + be_2$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ae_1 + be_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ 2a - b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 2x - y \end{cases}$$

   En prenant $a = x$ et $b = 2x - y$ on a bien $u = ae_1 + be_2$.
   Ceci prouve que $\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^2.}$

2. Soient $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,1,1)$. Montrons que $(e_1, e_2, e_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
   ① Les vecteurs $e_1$, $e_2$ et $e_3$ appartiennent à $\mathbb{R}^3$.
   ② Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ a & & & + & c & = & z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ & - & b & + & c & = & z - x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ & & & & 2c & = & z - x + y \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{2}(x - y + z) \\ b & = & \frac{1}{2}(x + y - z) \\ c & = & \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{array} \right.$$

   En prenant $a = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $b = \frac{1}{2}(x + y - z)$ et $c = \frac{1}{2}(-x + y + z)$, on a bien $u = ae_1 + be_2 + ce_3$.
   Ceci prouve que $\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

■

**Exercice 7 – Méthode 7, *Exemple 3.5*.**

1. Montrer que $F_5 = \{(t,4t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_7 = \{(a,a+b,b),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
3. Montrer que $F_8 = \{(a+b,a-2b,3b-a),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

*Correction.*

1. Déterminons une famille génératrice de $F_5 = \{(t,4t), t \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec un paramètre (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} u \in F_5 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ u = (t,4t) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ u = t(1,4) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}((1,4)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_5 = \operatorname{Vect}((1,4))$$

donc $F_5$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et la famille

$$\boxed{((1,4)) \text{ est génératrice de } F_5.}$$

2. Déterminons une famille génératrice de $F_7 = \{(a,a+b,b),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F_7 &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = (a,a+b,b) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = a(1,1,0)+b(0,1,1) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,1,1)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_7 = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$$

donc $F_7$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille

$$\boxed{((1,1,0),(0,1,1)) \text{ est génératrice de } F_7.}$$

3. On montre de même que $F_8$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille

$$\boxed{((1,1,-1),(1,-2,3)) \text{ est génératrice de } F_8.}$$

■

**Exercice 8 – Méthode 7, *Exemple 3.6*.**

1. Montrer que $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_{10} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

*Correction.*

1. Déterminons une famille génératrice de $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+3z=0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_9 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y+3z=0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple $x$ - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici $y$ et $z$.

$$u \in F_9 \quad \Leftrightarrow \quad x=2y-3z \qquad \text{(Étape 3)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_9 &\Leftrightarrow u=(2y-3z,y,z) && \text{(Étape 4)}\\ &\Leftrightarrow u=y(2,1,0)+z(-3,0,1) && \text{(Étape 5)}\\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-3,0,1)\big) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_9 = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-3,0,1)\big)$$

donc $F_9$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille

$$\boxed{(2,1,0),(-3,0,1) \text{ est génératrice de } F_9.}$$

2. Déterminons une famille de génératrice de $F_{10} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_{10} \quad \Leftrightarrow \quad (S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 0\\ 2x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 2)}$$

On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple $x$ et $y$ - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici $z$ et $t$, grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 0\\ & - & y & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t\\ y & = & -z-t \end{array}\right. \qquad \text{(Étape 3)} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_{10} &\Leftrightarrow u=(t,-z-t,z,t) && \text{(Étape 4)}\\ &\Leftrightarrow u=z(0,-1,1,0)+t(1,-1,0,1) && \text{(Étape 5)}\\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\big((0,-1,1,0),(1,-1,0,1)\big) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_{10} = \mathrm{Vect}\big((0,-1,1,0),(1,-1,0,1)\big)$$

donc $F_{10}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et la famille

$$\boxed{(0,-1,1,0),(1,-1,0,1) \text{ est génératrice de } F_{10}.}$$

■

# 5 Familles libres

**Exercice 9 – Méthode 8, *Exemple 3.10*.** Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

*Correction*. Soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (0,1,1)$. Montrons que la famille $(u_1,u_2,u_3)$ est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc
$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0)$$

donc
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

donc
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

donc
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

donc
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$ ■

**Exercice 10 – Méthodes 8 & 9, *Exemples 3.10, 3.11, 3.12 & 3.13*.** Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$
2. $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$
3. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$

*Correction.*

1. Montrons que la famille $(u_1,u_2)$ est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   On a
   $$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ + \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$
   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est libre.}}$
2. Montrons que la famille $(u_1,u_2,u_3)$ est liée. On cherche $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \neq (0,0,0)$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   - **Première méthode** : On cherche «à l'oeil» un lien entre les trois vecteurs. En effet, on peut remarquer directement que
     $$u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
     Donc la famille $(u_1,u_2,u_3)$ est liée.
   - **Deuxième méthode** : On cherche une solution non nulle au système donné par la relation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
     $$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ - \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_3 \end{array}\right. \end{aligned}$$
     Finalement, on peut prendre $\lambda_3 = 1$ et donc $\lambda_1 = 1$, puis $\lambda_2 = -1$, et on retrouve que
     $$u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est liée.}}$
3. Montrons que la famille $(u_1,u_2,u_3)$ est libre.
   Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   On a
   $$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(0,0,1) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$
   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$

4. Montrons que la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est liée. On peut remarquer directement que

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_4$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ est liée.}}$

■

**Exercice 11 –** Soient $u = (1,1,m)$, $v = (0,1,2)$ et $w = (1,0,3)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel $m$ pour que la famille $(u,v,w)$ soit libre.

# 6 Bases

**Exercice 12 – Méthode 10, *Exemple 3.16*.**

1. Montrer que la famille $((1,2),(-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

*Correction.*

1. Soient $u_1=(1,2)$ et $u_2=(-1,3)$. Montrons que la famille $(u_1,u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   ① Tous les vecteurs $u_1$ et $u_2$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$.
   ② Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=au_1+bu_2$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u=au_1+bu_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b = x \\ 2a + 3b = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b = x \\ 5b = y-2x \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3x}{5}+\frac{y}{5} \\ b = -\frac{2x}{5}+\frac{y}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=au_1+bu_2$.

   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

2. Soient $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(2,1,0)$ et $u_3=(1,1,1)$. Montrons que la famille $(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   ① Tous les vecteurs $u_1,u_2,u_3$ appartiennent à $\mathbb{R}^3$.
   ② Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=au_1+bu_2+cu_3$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u=au_1+bu_2+cu_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b + c = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b + c = x \\ b + c = y \\ -2b = z-x \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{x}{2}-y+\frac{z}{2} \\ c = -\frac{x}{2}+y+\frac{z}{2} \\ b = \frac{x}{2}-\frac{z}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique triplet $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=au_1+bu_2+cu_3$.

   Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

■

**Exercice 13 – Méthode 11, *Exemple 3.18*.** On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,0,3)$, $u_3 = (1,2,3)$ et $u_4 = (-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

*Correction.* Trouvons une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

- Par construction, la famille $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ engendre $F$. Cependant, ce n'est pas une famille libre (et donc pas une base) car, on peut remarquer par exemple que

$$u_3 = u_1 + u_2 \qquad \text{et} \qquad u_4 = -2u_1 + \frac{1}{3}u_2.$$

  *Si on ne le voit pas directement, on peut chercher quatre réels a, b, c, d non tous nuls tels que* $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$ *en résolvant le système associé.* Ceci montre également que

$$F = \text{Vect}(u_1,u_2)$$

  et donc que la famille $(u_1,u_2)$ engendre également $F$.
- Montrons que la famille $(u_1,u_2)$ est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} \quad & \begin{cases} \lambda_1 & & = 0 \\ 2\lambda_1 & & = 0 \\ & 3\lambda_2 & = 0 \end{cases} \\ \text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

  Donc, la famille $(u_1,u_2)$ est une famille libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est une base de } F.}$ ■

**Exercice 14 – Méthode 12, *Exemple 3.19*.** Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y=0\}$
2. $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0, x+2y+3z+4t=0\}$
3. $G_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2y=3z\}$
4. $G_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=z+t=t+x=0\}$

*Correction.*

1. Montrons que $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminons-en une base.
   - **Première étape :** On détermine une famille génératrice de $G_1$ grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :
   $$u \in G_1 \iff x-2y=0 \qquad \text{(Étape 2)}$$
   On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple $x$ - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici $y$ et $z$.
   $$u \in G_1 \iff x=2y \qquad \text{(Étape 3)}$$
   Ainsi, on obtient que
   $$\begin{aligned} u \in G_1 &\iff u=(2y,y,z) && \text{(Étape 4)}\\ &\iff u = y(2,1,0)+z(0,0,1) && \text{(Étape 5)}\\ &\iff u \in \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,0,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$
   Donc, la famille
   $$(u_1,u_2) = ((2,1,0),(0,0,1))$$
   est génératrice de $G_1$.
   - **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille $(u_1,u_2)$ est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=0$. On a
   $$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$
   $$\text{donc} \quad \begin{cases} 2\lambda_1 & = 0\\ \lambda_1 & = 0\\ \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$
   $$\text{donc} \quad \lambda_1=\lambda_2=0$$
   Donc, la famille $(u_1,u_2)$ est une famille libre.
   - Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((2,1,0),(0,0,1)) \text{ est une base de } G_1.}$

2. Montrons que $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0, x+2y+3z+4t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminons-en une base.
   - **Première étape :** On détermine une famille génératrice de $G_2$ grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :
   $$u \in G_2 \iff (S) \begin{cases} x - y + z - t = 0\\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \qquad \text{(Étape 2)}$$
   On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues - par exemple $x$ et $y$ - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici $z$ et $t$ à l'aide du pivot de Gauss.
   $$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0\\ 3y + 2z + 5t = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t\\ y = -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned}
u \in G_2 \quad &\Leftrightarrow \quad u = \left(-\tfrac{5}{3}z - \tfrac{2}{3}t, -\tfrac{2}{3}z - \tfrac{5}{3}t, z, t\right) && \text{(Étape 4)}\\
&\Leftrightarrow \quad u = z\left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{5}{3}, 0, 1\right) && \text{(Étape 5)}\\
&\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}\left(\left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{5}{3}, 0, 1\right)\right) && \text{(Étape 6)}\\
&\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}\left((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3)\right) && \text{(Étape 6)}
\end{aligned}$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3))$$

est génératrice de $G_2$.

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille $(u_1, u_2)$ est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}\\
\text{donc} \quad & \begin{cases} -5\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases}\\
\text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Donc, la famille $(u_1, u_2)$ est une famille libre.

- Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3)) \text{ est une base de } G_2.}$

3. On montre de même que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\left(2,1,\tfrac{2}{3}\right)\right) \text{ est une base de } G_3.}$$

4. On montre de même que

$$\boxed{\text{la famille } ((-1,1,-1,1)) \text{ est une base de } G_4.}$$

■

# 7 Pour aller plus loin

**Exercice 15 –** Soient

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \\ G & = & \{(b-2a, a+2b, a+b) \text{ avec } a,b \in \mathbb{R}\} \\ H & = & \text{Vect}\Big( (1,5,1)\ ,\ (2,1,-1)\ ,\ (-1,4,2) \Big) \end{array}$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. Déterminer une base de $H$.
4. Déterminer une équation cartésienne définissant $G$.
5. Déterminer une base de $F \cap G$.
6. Démontrer que $H = F$.

**Exercice 16 –** Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,2,2)$, $u_3 = (1,3,3)$ et $u_4 = (1,-1,-1)$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(u_3,u_4).$$

**Exercice 17 –** Soient $n \geqslant 2$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère $F$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par,

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $u_i = e_i - e_n$. Montrer que

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots u_{n-1})$$