TD 24 – Applications Linéaires

1 Linéarité d'une application

Exercice 1 – ***Méthode 2, Exemples 1.6 & 1.7.*** Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,-x+3y) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2} \end{array}$

iii) $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y,x-y-2z,x+z) \end{array}$ iv) $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & (x,2x,0) \end{array}$

Exercice 2 – ***Méthode 3, Exemples 1.8 & 1.9.*** Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2z,y,z-1,x+y+z) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,y-x^2) \end{array}$

Exercice 3 – Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,-x^3+3y) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x+y,x-y) \end{array}$

iii) $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ iv) $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$

2 Noyau d'une application et injectivité

Exercice 4 – ***Méthode 4, Exemples 2.2 & 2.3.*** Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes et en donner une base.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-x,z+y,x+y+2z) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$

Exercice 5 – ***Méthode 5, Exemples 2.6 & 2.7.*** Déterminer si les applications linéaires suivantes sont injectives ou non ? Justifier.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y,x+y) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-3x-y+z,8x+3y-2z,-4x-y+2z) \end{array}$

3 Image d'une application et surjectivité

Exercice 6 – ***Méthodes 6 & 8, Exemples 3.2, 3.3, 3.8 & 3.9.*** Déterminer l'image (sous forme conditionnelle) des applications linéaires suivantes et dire si elles sont surjectives ou non.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z,x-y-z,x+5y+3z) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-z) \end{array}$

Exercice 7 – ***Méthodes 7 & 8, Exemples 3.5, 3.8 & 3.9.*** Déterminer une base de l'image des applications linéaires suivantes et dire si elles sont surjectives ou non.

i) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z,x-y+z,3x-7y+3z) \end{array}$ ii) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z,y-3z,2z) \end{array}$

4 Théorème du rang

Exercice 8 – ***Méthode 9, Exemples 4.2 & 4.3.*** On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension de l'image de f.
4. En déduire une base de l'image de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 9 – ***Méthode 9, Exemples 4.2 & 4.3.*** On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-x,z+y,x+y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de l'image de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension du noyau de f.
4. En déduire une base du noyau de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 10 – ***Exemple 4.6.*** On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,x-y+z,x+y) \end{array}$$

Montrer que cette application linéaire est bijective.

5 Lien avec les matrices

Exercice 11 – On considère la matrice M et l'application f suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+2z,y-z,x+3z) \end{array}$$

1. Déterminer le noyau, le rang et l'image de la matrice M.
2. Déterminer le noyau, le rang et l'image de l'application f.
3. Déterminer la matrice canoniquement associée à l'application f. Vérifier que tous les résultats coincident.

Exercice 12 – On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y+z,2x+2z,x-y+3z) \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A canoniquement associée à l'application f.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 2x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que F est de dimension 2. On notera (u_1, u_2) une base de F.
4. On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer le noyau de f. L'application f est-elle injective ?
6. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ?