TD 00 – Calcul

Questions de cours

Exercice 1 – Vrai/Faux autour du cours. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, on exhibera un contre-exemple.

1. L'identité remarquable suivante est vraie : $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

☐ Vrai ☑ Faux

Contre-exemple : $(1+1)^2 = 4$ alors que $1^2 - 2\times1\times1 + 1^2 = 0$
La vraie identité remarquable est la suivante :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. L'égalité suivante est vraie : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

☐ Vrai ☑ Faux

Contre-exemple : $\frac{1}{1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ alors que $\frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$
Pour additionner deux fractions, les dénominateurs doivent être les mêmes :
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

3. L'égalité suivante est vraie : $a^n + a^m = a^{n+m}$.

☐ Vrai ☑ Faux

Contre-exemple : $2^1 + 2^2 = 5$ alors que $2^{1+2} = 2^3 = 8$
La vraie règle est la suivante :
$a^n \times a^m = a^{n+m}$

4. L'égalité suivante est vraie : $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

☑ Vrai ☐ Faux

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

Exercices

Exercice 2 – Calcul littéral - Développer. Développer et réduire les expressions suivantes.

$$A = (3x+5)(1-x); \qquad B = (2-3x)^2; \qquad C = (2x+3x^2)^2;$$
$$D = (1-2x)(1+2x) - 3x(5-x); \qquad E = 2 - 4x - 3\left((1-x)^2 - (5-x)\right).$$

- $A = (3x+5)(1-x) = 3x - 3x\times x + 5 - 5x = -3x^2 - 2x + 5$
- $B = (2-3x)^2 = 2^2 - 2\times2\times3x + (3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$
- $C = (2x+3x^2)^2 = (2x)^2 + 2\times2x\times3x^2 + (3x^2)^2 = 4x^2 + 12x^3 + 9x^4$
- $D = (1-2x)(1+2x) - 3x(5-x) = 1^2 - (2x)^2 - 3x\times5 + 3x\times x = 1 - 4x^2 - 15x + 3x^2 = -x^2 - 15x + 1$
- $E = 2 - 4x - 3\left((1-x)^2 - (5-x)\right) = 2 - 4x - 3(1 - 2x + x^2 - 5 + x)$
$= 2 - 4x - 3(-4 - x + x^2)$
$= 2 - 4x + 12 + 3x - 3x^2$
$= 14 - x - 3x^2$

Exercice 3 – Calcul littéral - Factoriser.

$$A = 6x^2 - x; \qquad B = 4x^2 + 4x + 1; \qquad C = x^2 - 6x + 9;$$
$$D = 9x^2 - 1; \qquad E = (1+x)^2 - 4; \qquad F = x^2 - 4 - (x+2)(5x+3).$$

- $A = 6x^2 - x = 6 \times \cancel{x} \times x - \cancel{x} = x(6x-1)$
- $B = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = (2x+1)^2$ [en utilisant $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]
- $C = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x-3)^2$ [en utilisant $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$]
- $D = 9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x-1)(3x+1)$ [en utilisant $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$]
- $E = (1+x)^2 - 4 = (1+x)^2 - 2^2 = (1+x-2)(1+x+2) = (x-1)(x+3)$ [en utilisant $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$]
- $F = x^2 - 4 - (x+2)(5x+3) = (x+2)(x-2) - (x+2)(5x+3) = (x+2)(x-2-(5x+3)) = (x+2)(x-2-5x-3) = (x+2)(-4x-5) = -(x+2)(4x+5)$

Exercice 4 – Fractions. Calculer et simplifier les fractions suivantes.

$$A = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}; \qquad B = \frac{\frac{3}{4}}{2}; \qquad C = \frac{3}{\frac{4}{2}}; \qquad D = \frac{3}{4} \times \frac{-16}{21}.$$

- $A = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$

  On simplifie le résultat :

  $A = \frac{3}{6} = \frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3} \times 2}$

  Donc $A = \frac{1}{2}$

- $B = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$

  On ne peut pas simplifier (3 n'est pas un facteur de 8)

  Donc $B = \frac{3}{8}$

- $C = \frac{3}{\frac{4}{2}} = 3 \times \frac{2}{4} = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4}$

  On simplifie le résultat :

  $C = \frac{6}{4} = \frac{3 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2}}$

  Donc $C = \frac{3}{2}$

- $F = \frac{3}{4} \times \frac{-16}{21} = -\frac{3 \times 16}{4 \times 21}$

  Plutôt que de faire la multiplication de suite, on simplifie

  $F = -\frac{\cancel{3} \times \cancel{4} \times 4}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 7} = -\frac{4}{7}$

  Donc $F = -\frac{4}{7}$

Exercice 5 – Fractions. Soient a et b deux réels non nuls avec $a \neq b$. Simplifier les fractions suivantes

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}; \qquad \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}; \qquad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} \quad (\text{pour a } \neq -1).$$

- Pour additionner les deux fractions, on commence par mettre au même dénominateur.

  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a \times a}{b \times a} + \frac{b \times b}{a \times b}$

  $= \frac{a^2 + b^2}{ab}$

- On a

  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{1 \times b}{a \times b} + \frac{1 \times a}{b \times a}}{\frac{1 \times b}{a \times b} - \frac{1 \times a}{b \times a}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b+a}{ab} \times \frac{ab}{b-a}$

  Donc

  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{(b+a) \times \cancel{ab}}{\cancel{ab} \times (b-a)} = \frac{b+a}{b-a}$

- On a

  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{a} + \frac{1}{a}} = 1 + \frac{1}{\frac{a+1}{a}} = 1 + 1 \times \frac{a}{a+1} = 1 + \frac{a}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = \frac{a+1+a}{a+1} = \frac{2a+1}{a+1}$

Exercice 6 – Puissances. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = 2^3 \times (4 \times 3)^2; \qquad B = \frac{7^7}{7^4}; \qquad C = \frac{(2^2)^3 \times 10 \times 4^{-2}}{15 \times 8};$$

- $A = 2^3 \times (4 \times 3)^2$
  $= 2^3 \times 4^2 \times 3^2$
  $= 8 \times 16 \times 9$
  $= 72 \times 16$
  $= 1152$

  $$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 16 \\ \hline 432 \\ +\ 720 \\ \hline 1152 \end{array}$$

- $B = \frac{7^7}{7^4} = 7^{7-4} = 7^3 = 7 \times 7 \times 7$

  Donc $B = 49 \times 7$
  $= 343$

  $$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

- $C = \frac{(2^2)^3 \times 10 \times 4^{-2}}{15 \times 8} = \frac{4^3 \times \cancel{5} \times \cancel{2}}{3 \times \cancel{5} \times 4 \times \cancel{2} \times 4^2} = \frac{\cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4}}{3 \times \cancel{4} \times \cancel{4} \times \cancel{4}}$

  Donc $C = \frac{1}{3}$

Exercice 7 – Puissances.

1. Soit x un réel tel que $x > 1$. Simplifier l'expression suivante
$$\frac{1}{x-1} \times \frac{1}{2+\frac{1}{x-1}}.$$
2. Soit n un entier naturel non nul et a un réel non nul. Montrer l'égalité suivante :
$$\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a}-1\right)^n = \frac{(a-1)^n}{na^n}.$$

1. Déjà, l'expression considérée a un sens pour des $x > 1$ car
$$\underbrace{x-1}_{>0} \neq 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{2+\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{>0}}_{>2} \neq 0$$
Soit $x > 1$. On a
$$\frac{1}{x-1} \times \frac{1}{2+\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{(x-1)(2+\frac{1}{x-1})} = \frac{1}{2(x-1)+(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{2x-2+1} = \frac{1}{2x-1}$$

2. Déjà tous les membres de l'égalité ont un sens pour $a \neq 0$ et $n \neq 0$ car $n \neq 0$, $a \neq 0$ et $na^n \neq 0$.
Soient n entier naturel non nul et a un réel non nul.
$$\frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a}-1\right)^n = \frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n} \times \left(\frac{1-a}{a}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(1-a)^n}{a^n} = \frac{(-1 \times (1-a))^n}{n a^n} = \frac{(a-1)^n}{n a^n}$$

Exercice 8 – Racine carrée. Simplfier les racines carrées suivantes :
$$\sqrt{3} \times \sqrt{48}; \qquad \sqrt{250}; \qquad \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{54}}.$$

- $\sqrt{3} \times \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 48} = \sqrt{3 \times 4 \times 12} = \sqrt{3 \times 4 \times 3 \times 4} = \sqrt{3^2 \times 4^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{4^2} = 3 \times 4 = 12$

$\sqrt{250} = \sqrt{25 \times 10} = \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 10} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{10} = 5 \times \sqrt{10}$

- $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{63}{54}} = \sqrt{\frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 7}{2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$

On ne laisse pas de racine au dénominateur.
Donc
$$\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7 \times 6}}{6} = \frac{\sqrt{42}}{6}$$

Exercice 9 – Racine carrée. On considère l'expression suivante :
$$\sqrt{x-1} - \frac{x^2-1}{x\sqrt{x-1}}.$$

1. Dire pour quelles valeurs de x cette expression est bien définie.
2. Simplifier cette expression *(on pourra penser à une identité remarquable pour transformer le numérateur de la fraction)*.

1. Cette expression est bien définie dès que :
$x-1 \geqslant 0$ et $x \neq 0$ et $\sqrt{x-1} \neq 0$
c'est-à-dire dès que
$x \geqslant 1$ et $x \neq 0$ et $x-1 > 0$
c'est-à-dire dès que
$x > 1$.

2. Soit $x > 1$. On a
$$\sqrt{x-1} - \frac{x^2-1}{x\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x\sqrt{x-1}}$$
en utilisant que $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
$$= \sqrt{x-1} - \frac{(x+1)\sqrt{x-1}\,\cancel{\sqrt{x-1}}}{x\,\cancel{\sqrt{x-1}}}$$
car pour tout $a > 0$, $a = (\sqrt{a})^2$ par définition de la racine carrée
$$= \frac{\sqrt{x-1} \times x}{x} - \frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x-1} \times x - (x+1)\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x-1}\,(x-(x+1))}{x} = \frac{\sqrt{x-1}\,(x-x-1)}{x} = -\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$