TD 01 – Polynômes (Correction)

Exercice 1 – 1.

	P	Q
coeff.constant	5	1
degre	3	2
coef. dom.	3	1
ensemble	$\mathbb{R}_3[x], \mathbb{R}_4[x], \dots$	$\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_3[x],$

2. On a: $\deg(-2P) = \deg(P) = 3$
$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) = \max(3,2) = 3$
$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q = 3 + 2 = 5$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(-2P)(x) &= -2 \times P(x)\\ &= -2\left(3x^3 + 4x^2 + 5\right)\\ &= -6x^3 - 8x^2 - 10\end{aligned}$$

$\deg(-2P) = 3$ cela coincide avec la question 2

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x)\\ &= 3x^3 + 4x^2 + 5 + x^2 - 7x + 1\\ &= 3x^3 + 5x^2 - 7x + 6\end{aligned}$$

$\deg(P+Q) = 3 \leqslant 3$ cela coincide avec la question 2

$$\begin{aligned}(PQ)(x) &= P(x) \times Q(x)\\ &= \left(3x^3 + 4x^2 + 5\right)\left(x^2 - 7x + 1\right)\\ &= 3x^5 - 21x^4 + 3x^3 + 4x^4 - 28x^3 + 4x^2 + 5x^2 - 35x + 5\\ &= 3x^5 - 17x^4 - 25x^3 + 9x^2 - 35x + 5\end{aligned}$$

- $\deg(PQ) = 5$: cela coincide avec la question 2 - la formule coincide avec celle trouvée en question 3

Exercice 2 – Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient,

$$\begin{aligned}a(x+2)^2 + b(x+3)^2 &= a\left(x^2 + 4x + 4\right) + b\left(x^2 + 6x + 9\right)\\ &= ax^2 + 4ax + 4a + bx^2 + 6bx + 9b\\ &= (a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a + 9b\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x+2)^2 + b(x+3)^2 = cx+10 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a+9b = 0\times x^2 + cx + 10$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+6b=c \\ 4a+9b=10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8=-a \\ 4a+6b=c \\ 4a+9\times(-a)=10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=4 \\ a=-2 \end{cases}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}$. On a:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} &= \frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+c(x-1)x}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{ax^2+ax+bx^2-b+cx^2-cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ -b-2c=0 \\ b=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,1\}$,

$$\frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Exercice 3 – 1. Une unique racine réelle: $-3/7$
2. Une unique racine réelle: -12
3. Deux racines réelles: -2 et $-\frac{1}{5}$
4. Aucune racine réelle
5. Une unique racine réelle: $3/2$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 + mx + 1$
C'est un polynôme de degré deux, on calcule son discriminant:

$$\Delta = m^2 - 4$$

- 1*er* cas: si $\Delta > 0$, c'est-a-dire $m > 2$ ou $m < -2$ alors deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2}$$

- $2^{\text{ième}}$ cas : si $\Delta = 0$, c-a-d $m = 2$ ou $m = -2$ alors une unique racine réelle

$$x_0 = -\frac{m}{2}$$

- $3^{\text{ième}}$ cas: si $\Delta < 0$, c-a-d $-2 < m < 2$ alors aucune racine réelle

Exercice 4 – 1. Résoudre l'équation $\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1}$.
Les valeurs interdites sent les réels x tels que:

$$x+1=0 \quad \text{et } x-1=0,$$
$$\text{c'est-a-dire } x=-1 \text{ et } x=1.$$

• Soit x un nombre réel différent de 1 et -1 .

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1} &\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-1) = (2x-5)(x+1)\\ &\Leftrightarrow x^2 - x - x + 1 = 2x^2 + 2x - 5x - 5\\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 3x - 5\\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 3x + 5 = 0\\ &\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0\end{aligned}$$

• On résout l'équation $-x^2 + x + 6 = 0$. - On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4\times(-1)\times 6\\ &= 1+24\\ &= 25\end{aligned}$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par:
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$
$x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$
Conclusion: Comme les valeurs trouvées me sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par:

$$S = \{-2, 3\}$$

Vérification:

$$\frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad \text{et } \frac{2\times(-2)-5}{-2-1} = \frac{-4-5}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$
$$\frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et } \frac{2\times 3-5}{3-1} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Résoudre l'équation $\frac{4}{x-4} = \frac{40}{x^2-16} - 1$
• Les valeurs interdites sont les réels x tels que:

$$x-4=0 \quad \text{et } x^2-16=0,$$
$$\text{c'est-à-dire } x=4 \text{ et } x=-4.$$

• Soit x un nombre réel différent de 4 et -4 .

$$\begin{aligned}\frac{4}{x-4} = \frac{40}{x^2-16} - 1 &\Leftrightarrow \frac{4}{x-4} = \frac{40-\left(x^2-16\right)}{x^2-16} = \frac{56-x^2}{x^2-16}\\ &\Leftrightarrow 4\cdot\left(x^2-16\right) = \left(56-x^2\right)(x-4)\\ &\Leftrightarrow 4\cdot(x-4)(x+4) = \left(56-x^2\right)(x-4)\\ &\Leftrightarrow 4(x+4) = 56-x^2\\ &\Leftrightarrow 4x+16 = 56-x^2\\ &\Leftrightarrow 4x+16-56+x^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+4x-40 = 0\end{aligned}$$

• On résout l'équation $x^2 + 4x - 40 = 0$ - On calcule le discriminant:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4\times 1\times(-40)\\ &= 16+160\\ &= 176\end{aligned}$$

- Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par:

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{176}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{11}}{2} = -2+2\sqrt{11}$$

$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{176}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{11}}{2} = -2-2\sqrt{11}$$

Conclusion: Comme les valeurs trouvées me sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par:

$$S = \{-2+2\sqrt{11}, -2-2\sqrt{11}\}$$

- Vérification: (...)

Exercice 5 – On cherche $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré 2 tq

$$\text{(s)}\ \begin{cases} P(-1) = 1\\ P(0) = -1\\ P(1) = -1\end{cases}$$

On peut chercher P sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c des réels à déterminer. Avec les notations, le système (S) devient:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c = 1\\ c = -1\\ a+b+c = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 2\\ a+b = 0\\ c = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-(-a) = 2\\ b = -a\\ c = -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1\\ b = -1\\ c = -1\end{cases}$$

Finalement, il existe un unique polynôme vérifiant les trois conditions (S) qui est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - x - 1.$$

Exercice 6 – - Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2\\ f(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[\\ f(x) \geqslant 2 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [3; +\infty[\end{aligned}$$

Comme le polynôme P
- est de degré 2
- admet 1 et 2 comme racines (d'après le graphique) il est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a(x-1)(x-2)$$

où a est son coeff dominant (réel) à déterminer. or d'après le graphique,

$$P(0) = 2$$

Donc $a \in \mathbb{R}$ doit nécessairement vérifier

$$\begin{aligned} & a \times (0-1)(0-2) = 2 \\ & ie \quad a = 1. \end{aligned}$$

Finalement, le polynôme P est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(x-2)$$

Exercice 7 – 1. Soit $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\begin{cases} r+s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

Alors r et s sont les racines du polynôme suivant:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} P(x) &= x^2 - (r+s)x + r \times s \\ &= x^2 + 2x - 15 \end{aligned}$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant:
- on a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par:

$$\frac{-2+\sqrt{64}}{2} = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{-2-\sqrt{64}}{2} = \frac{-2-8}{2} = -5$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par:

$$S = \{(3,-5),(-5,3)\}$$

2. Notons s l'âge de Sophie et m l'âge de Marc. D'après énoncé, (s,m) est solution de:

$$\begin{cases} s+m = 28 \\ s \times m = 192 \\ m > s \end{cases}$$

Alors m et s sont les racines du polynôme suivant:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - (m+s)x + m \times s$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant:
- on a $\Delta = (-28)^2 - 4 \times 192 = 784 - 768 = 16$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par:

$$\frac{-(-28)+\sqrt{16}}{2} = \frac{28+4}{2} = 16 \quad \text{et} \quad \frac{-(-28)-\sqrt{16}}{2} = \frac{28-4}{2} = 12$$

Comme $m > s$, nécessairement

$$m = 16 \text{ et } s = 12$$

Exercice 8 – On considère le polynôme P donné par: pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^3 - x - 2$

0 . Comme P est de degré 3 , il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. On a :

$$P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$$

donc 1 est une racine de P.

2. On cherche un polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)Q(x)$

- Alors nécessairement, Q et un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme pour tout $x \in \mathbb{R}, Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x-1)Q(x) &= (x-1)\left(ax^2+bx+c\right)\\ &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-1)Q(x)$$

si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{rl} a & = 3\\ -a+b & = 0\\ -b+c & = -1\\ -c & = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3\\ b = 3\\ c = 2\end{array}\right.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = 3x^2+3x+2$$

3. D'après la Question 2, on a

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1) = Q(x) \times \left(3x^2+3x+2\right)$$

Donc il reste seulement à regarder les racines de Q. Comme Q et un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant:

- on a $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 = -15$
- comme $\Delta < 0$, le polynôme Q n' admet pas de racines réelles.

Donc P admet seulement 1 comme racine réelle.

4. On utilise la forme factorisée de P pour dresser son tableau de signe.

	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
$3x^2+3x+2$		+		+	
$P(x)$		-	0	+	

Donc $P \geqslant 0$ sur $[1; +\infty[$ et $P \leqslant 0$ sur $]-\infty, 1]$

Exercice 9 – On considère le polynôme P donné par: pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

0. Comme P est de degré 3 , il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. on a :

$$P(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$$

Donc -2 et une racine de P

2. On cherche un polynôme a tq pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+2)Q(x)$

- Alors nécessairement, Q est un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme pour tout $x \in \mathbb{R}, Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x+2)Q(x) &= (x+2)\left(ax^2+bx+c\right)\\ &= ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c\\ &= ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x+2)Q(x)$$

si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 2a+b &= -2 \\ 2b+c &= -5 \\ 2c &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 - 4x + 3}$

3. D'après la Question 2, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)Q(x) \\ &= (x+2)\left(x^2 - 4x + 3\right) \end{aligned}$$

Donc il reste seulement à factoriser Q.
Comme Q est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant:
- on a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux racines réelles données par

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \quad \text{et } x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = (x-3)(x-1)$ et $\boxed{P(x) = (x+2)(x-1)(x-3)}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

Donc P admet exactement trois racines distinctes, données par $\boxed{-2, 1 \text{ et } 3.}$

5. a) Soit $x > 0$ (pour que l'équation soit licite) On a :

$$\begin{aligned} (\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0 &\Leftrightarrow P(\ln x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -2 \text{ or } \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = e^{-2} \text{ ou } x = e^1 \text{ ou } x = e^3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\left\{e^{-2}, e^1, e^3\right\}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0 &\Leftrightarrow e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^x\right)^3 - 2\left(e^x\right)^2 - 5e^x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow P\left(e^x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = -2 \text{ ou } e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 1 = 0 \text{ ou } x = \ln 3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\{0, \ln 3\}}$

Exercice 10 – On considère le polynôme P défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

En utilisant la même méthode que pour les exercices 8 et 9 , on trouve que le polynôme P se factorise de la manière suivante: pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) = 2(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Exercice 11 – **1.** Première méthode : à la main

Effectuons la division euclidienne de A par B où pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$A(x) = x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$. on cherche Q et R tels que

$$A = B \times Q + R \text{ arec } \deg R < \deg B = 1$$

none Q et R sont nécessairement de degré 1 .

on les cherche sous la forme pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = ax + b$$

$$R(x) = cx + d$$

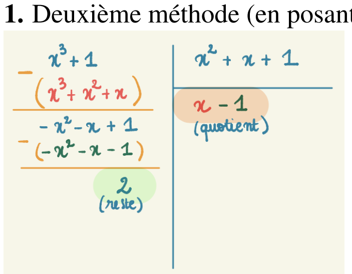
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) \\ &= \left(x^2 + x + 1\right)(ax + b) + cx + d \\ &= ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx + ax + b + cx + d \\ &= ax^3 + (a + b)x^2 + (a + b + c)x + b + d \end{aligned}$$

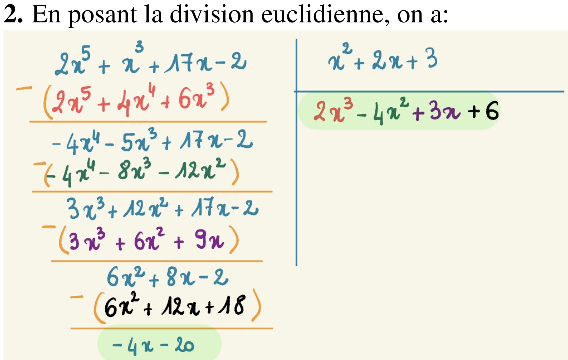
Par identification, on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}, Q(x) = x - 1$ (quotient de la division euclidienne)
$R(x) = 2$ (reste de la division euclidienne)
1. Deuxième méthode (en posant la division)



2. En posant la division euclidienne, on a:



Donc on obtient

$$A = BQ + R$$

avec pour tout $x \in \mathbb{R}, Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6$ $\qquad R(x) = -4x - 20$