Chapitre 21 : Application de la dérivation

1 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

1.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition 1.1 — **Inégalité des accroissements finis, v1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que

① La fonction f est **dérivable** sur I.

② Il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, on a $m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors,

$$\forall (a,b) \in I^2,\ a < b, \qquad m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Proposition 1.2 — **Inégalité des accroissements finis, v2.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que

① La fonction f est **dérivable** sur I.

② Il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in I$, on a $|f'(x)| \leqslant k$.

Alors,

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$

? Ce théorème quantifie le fait que si la **dérivée** d'une fonction est **bornée**, cela limite l'**amplitude** de ses **variations**.

Exemple 1.3 Montrer que,

$$\forall a,b \in]-\infty,-1], \qquad 0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b-a)$$

On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc}]-\infty,-1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

① La fonction f est dérivable sur $]-\infty,-1]$ (et même sur $\mathbb{R}$...) et

$$\forall x \in]-\infty,-1], \qquad f'(x) = \exp(x)$$

② De plus, par positivité et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in]-\infty,-1], \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \exp(-1)$$

Donc, d'après **l'inégalité des accroissements finis**, on a,

$$\forall a,b \in]-\infty,-1],\ a < b \qquad 0(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \exp(-1)(b-a)$$

c'est-à-dire,

$$\forall a,b \in]-\infty,-1],\ a < b, \qquad 0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b-a)$$

L'étude d'une **suite récurrente** est une application fréquente de l'**inégalité des accroissements finis**. Plus précisément, l'étude d'une suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ se fait en général selon les étapes suivantes.

1. On trouve un intervalle I stable par f (c-à-d pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$).
2. Alors, si $u_0 \in I$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
3. On trouve un point fixe de f, c'est-à-dire un réel ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
4. On trouve un réel $k \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$.
5. En appliquant l'IAF, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$.
6. Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$.
7. Si $0 < k < 1$, en laissant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on en déduit que la suite converge vers ℓ.

Exemple 1.4 — **Étude d'une suite définie par récurrence à l'aide de l'IAF.** (❤)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$$

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ à déterminer grâce à la méthode précédente.

1. Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) :\ \text{« } u_n \in [0,2] \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 \in [0,2].$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 0 \in [0,2]$. Et donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n \in [0,2]$$

On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \in [0,2]$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 2 & \\ \text{donc} & 2 \leqslant 2 + u_n \leqslant 4 & \\ \text{donc} & \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+u_n} \leqslant 2 & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{soit} & \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \text{d'après l'énoncé} \end{array}$$

Donc, à fortiori

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0,2].$$

2. Résolvons l'équation $f(\ell) = \ell$ d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\ell = f(\ell) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell = \sqrt{2+\ell}.$$

On en déduit d'abord que nécessairement $\ell \geqslant 0$. Puis que,

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cancel{\ell = -1} \quad \text{ou} \quad \ell = 2$$

Donc l'équation $f(\ell) = \ell$ admet une unique solution donnée par $\ell = 2$.

3. Montrons que la dérivée de f est bornée sur $[0, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]-2, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-2, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Comme la dérivée est positive sur $]-2, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$, déjà, on remarque que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad |f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

Soit $x \in [0, +\infty[$. On a

$$\begin{array}{lll} & x \geqslant 0 & \\ \text{donc} & x+2 \geqslant 2 & \\ \text{donc} & \sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{2} & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } [0, +\infty[\\ \text{donc} & 2\sqrt{x+2} \geqslant 2\sqrt{2} & \\ \text{donc} & \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\end{array}$$

Finalement, on a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

4. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|.$$

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction f car
① La fonction f est **dérivable** sur $[0, +\infty[$.
② Il existe $k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|f'(x)| \leqslant k$.
Donc,

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} |b - a|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $b = u_n$ et $a = 2$ dans l'inégalité précédente (car u_n et 2 appartiennent à $[0, +\infty[$), comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(2) = 2$, on obtient

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|.$$

5. Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } |u_n - 2| \leqslant 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - 2| \leqslant 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^0 = 2.$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ donc $|u_0 - 2| = 2 \leqslant 2$. Et donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - 2| \leqslant 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$$

  On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}$$

  D'après l'IAF, on sait que

$$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|.$$

  Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - 2| &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \times |u_n - 2| \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \\ &\leqslant 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

  Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - 2| \leqslant 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$$

6. Par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1.$$

   Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

1.2 Monotonie des fonctions dérivables

Proposition 1.5 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **dérivable** sur l'**intervalle** I.
1. La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
2. La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
3. La fonction f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Proposition 1.6 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **dérivable** sur l'**intervalle** I.
1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

! Il est indispensable pour appliquer ce résultat de travailler sur un **intervalle**. En effet, si l'on considère par exemple la fonction inverse, elle est définie et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$. Cependant, la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (en effet, $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$). La fonction inverse est seulement décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Exemple 1.7 On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x}{1+x} \end{array}$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f. En déduire l'allure de la courbe de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et

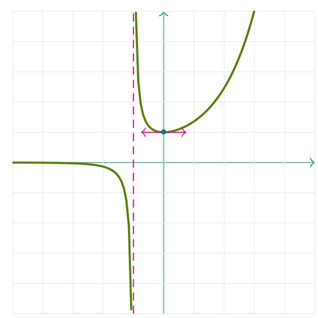
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \qquad f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Pour représenter l'allure de la courbe, on peut placer les points suivants :

- Le taux d'accroissement diverge vers $\pm\infty$ en $(-1)^{\pm}$. Donc, la fonction admet une asymptotique verticale -1.
- La dérivée s'annule en 0, donc la fonction admet une tangente horizontale en $x = 0$.
- La fonction vaut 1 en 0.
- La fonction est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et tend vers 0, elle admet une asymptote verticale $y = 0$ en $-\infty$.



1.3 Conséquence sur les extrema locaux

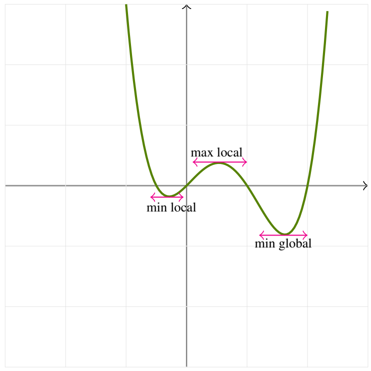
Définition 1.8 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I.

- On dit que $f(a)$ est un **maximum local** de f lorsque la fonction f est majorée par $f(a)$ **au voisinage de** a. Autrement dit,
$$\exists \delta > 0, \ \forall x \in I, \ |x - a| < \delta, \ f(x) \leqslant f(a).$$
- On dit que $f(a)$ est un **minimum local** de f lorsque la fonction f est minorée par $f(a)$ **au voisinage de** a. Autrement dit,
$$\exists \delta > 0, \ \forall x \in I, \ |x - a| < \delta, \ f(x) \geqslant f(a).$$

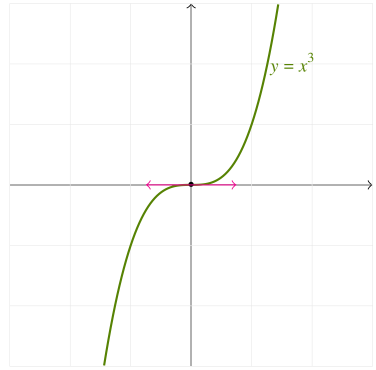
! On dit que $f(a)$ est un **maximum global** de f lorsque la fonction f est majorée par $f(a)$ sur tout l'intervalle I entier. Autrement dit,
$$\forall x \in I, \ f(x) \leqslant f(a).$$

Proposition 1.9 Soient f une fonction dérivable sur un **intervalle ouvert** I et a un point de I. On a :

$$f \text{ admet un extremum local en } a \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ s'annule en changeant de signe en } a$$



La dérivée de la fonction représentée s'annule trois fois et y change de signe à chaque fois : elle admet trois extrema locaux.



La dérivée de la fonction cube s'annule en 0 mais elle ne change pas de signe : la fonction n'admet pas d'extrema en 0.

? Souvent pour trouver des extrema locaux, on peut procéder de la manière suivante.

1. On cherche les points d'annulation de la dérivée. Cela donne des candidats pour les extrema.
2. On regarde pour chacun des candidats si la dérivée change de signe au voisinage de ce point pour déterminer s'il s'agit d'un extremum.
3. On peut ensuite regarde si les extrémités de l'intervalle (si elles appartiennent à l'intervalle) correspondent ou non à des extrema locaux.

Exemple 1.10 On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3\left(1-\frac{3}{5}x^2\right). \end{array}$$

Déterminer les extrema de la fonction f sur $I = [-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

1. La fonction f est dérivable sur I en tant que fonction polynomiale. De plus,

$$\forall x \in I, f'(x) = 3x^2(1-x)(1+x).$$

Donc, l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur I données par $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$. Si la fonction f admet des extrema locaux sur I, c'est nécessairement en un de ces trois points.

2. Pour déterminer si les candidats sont des extrema ou pas, il faut regarder si la dérivée change de signe au voisinage de ces points là. Pour cela, on peut tracer le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit que :

- -1 est un minimum local (mais pas global car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)
- 0 n'est pas un extremum (car la dérivée ne change pas de signe autour de $x = 0$)
- 1 est un maximum global.

3. Enfin, on peut regarder les extrémités de l'intervalle. On observe que $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ est un maximum local (mais pas global).

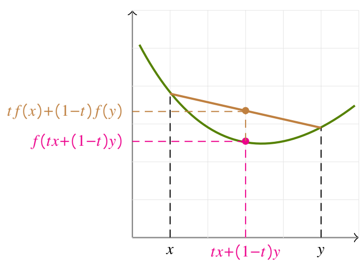
2 Fonctions concaves & convexes

La *convexité* est une notion importante par exemple en *optimisation* grâce au résultat suivant.

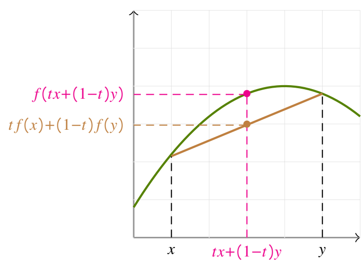
> Proposition 2.1 Si f est convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I ouvert et que $f'(a) = 0$ pour un certain $a \in I$ alors f admet un minimum en a.

Définition 2.2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. f est dite **convexe** lorsque
$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$
2. f est dite **concave** lorsque
$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \geqslant t f(x) + (1-t) f(y).$$
3. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet un **point d'inflexion** en $a \in I$ si f change de convexité en a.



La courbe d'une fonction *convexe* est située *en dessous de ses cordes*.



La courbe d'une fonction *concave* est située *au dessus de ses cordes*.

Exercice 2.3 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$, il s'agit de montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y)$$
c'est-à-dire
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) - t f(x) - (1-t) f(y) \leqslant 0.$$
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. On a,
$$\begin{aligned} f\big(tx + (1-t)y\big) - t f(x) - (1-t) f(y) &= (tx + (1-t)y)^2 - tx^2 - (1-t)y^2 \\ &= t^2x^2 + 2t(1-t)xy + y^2 - tx^2 - (1-t)y^2 \\ &= t(t-1)x^2 + t(1-t)y^2 2t(1-t)xy \\ &= t(t-1)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= t(t-1)(x-y)^2 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$
car $(x-y)^2 \geqslant 0$, $t \leqslant 0$ et $t - 1 \geqslant 0$ (car $t \leqslant 1$). Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On voit que démontrer de la convexité grâce à la définition est un peu fastidieux... On va donc chercher des caractérisations de la convexité plus facile à mettre en oeuvre.

3 Caractérisation de la convexité

Proposition 3.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

- **Caractérisation de la convexité :**

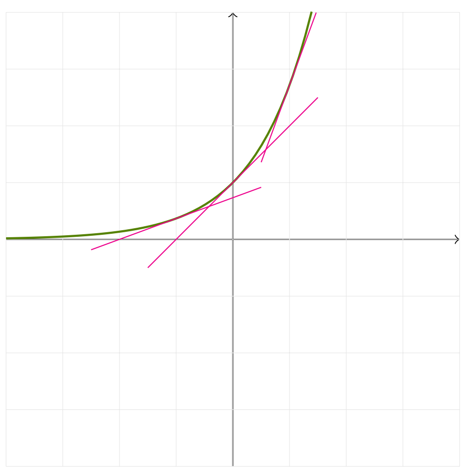
$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I & \iff \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de ses tangentes} \\ & \iff \forall x, a \in I, f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a) \\ & \iff f' \text{est croissante sur } I \\ & \iff \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0 \end{aligned}$$

- **Caractérisation de la concavité :**

$$\begin{aligned} f \text{ est concave sur } I & \iff \mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de ses tangentes} \\ & \iff \forall x, a \in I, f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a) \\ & \iff f' \text{est décroissante sur } I \\ & \iff \forall x \in I,\ f''(x) \leq 0 \end{aligned}$$

? Comment utiliser ces caractérisations ?

- La méthode la plus simple pour démontrer la *convexité/concavité* d'une fonction consiste donc à montrer que la *dérivée seconde* de la fonction est toujours positive/toujours négative.
- On utilise le fait qu'une fonction convexe est toujours au dessus de ses tangentes pour démontrer des inégalités lorsque l'on sait déjà que la fonction est convexe.



La fonction exponentielle est *convexe*. Sa courbe est située *au-dessus de ses tangentes*.

La fonction logarithme est *concave*. Sa courbe est située *en-dessous de ses tangentes*.

? Pour tracer de la manière la plus précise la courbe d'une fonction, on peut

- Faire apparaître des *valeurs* de la fonction sur la courbe ;
- Faire apparaître les *limites* de la fonction aux extrémités de l'intervalle considéré ;
- Faire apparaître les *variations* de la fonction ;
- Faire apparaître la *convexité* de la fonction ;
- Faire apparaître les *asymptotes* verticales/horizontales ;
- Faire apparaître les *minima/maxima*.

Exemple 3.2 — **Représentation graphique d'une fonction.** Représenter de la manière la plus précise possible le graphe de la fonction suivante

$$\begin{array}{rcccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

Cherchons des informations sur la fonction f afin de la représenter au mieux.

- On a, par exemple,
$$f(0) = 0$$
- Par croissances comparées, on a,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut calculer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$
  - En particulier, on peut remarquer que la dérivée s'annule exactement en 1 et -1. Donc la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale.
  - On peut aussi utiliser l'expression de la dérivée pour en déduire le tableau de variations de la fonction f.

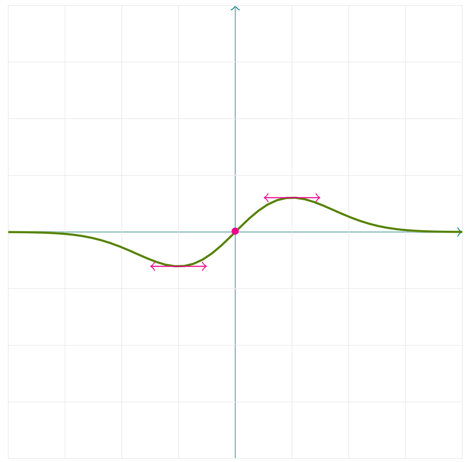
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

  - À partir du tableau de variations, on déduit que f admet un minimum global en -1 qui vaut $-\exp(-1/2)$ et un maximum global en 1 qui vaut $\exp(-1/2)$.
- La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$
On en déduit le tableau de signe suivant pour f''.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit donc que,
  - La fonction f est convexe sur $[-\sqrt{3}, 0]$ et sur $[\sqrt{3}, +\infty[$.
  - La fonction f est concave sur $[-\infty, -\sqrt{3}]$ et sur $[0, \sqrt{3}]$.
  - La fonction f admet trois points d'inflexions en $-\sqrt{3}, 0$ et en $\sqrt{3}$.

À partir de ces informations, on peut tracer le graphe suivant.



Exemple 3.3 — **Autour de la convexité de la fonction exponentielle.** Soit f la fonction donnée par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\exp(x)+\exp(y)}{2}$$
3. Donner l'équation de la tangente en 0 de la courbe de la fonction f.
4. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geqslant x+1$$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \exp(x) \geqslant 0.$$
Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Comme la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, on sait que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in [0,1], \ \ f\big(tx+(1-t)y\big) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y),$$
c'est-à-dire
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in [0,1], \ \ \exp\big(tx+(1-t)y\big) \leqslant t\exp(x) + (1-t)\exp(y).$$
En prenant $t = \frac{1}{2}$, on obtient alors que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\exp(x)+\exp(y)}{2}$$
3. L'équation de la tangente en 0 de la courbe de la fonction f est donnée par
$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = x+1$$
4. Comme la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au dessus de sa tangente en 0 donc,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geqslant x+1$$

Exemple 3.4 — **Autour de la concavité de la fonction logarithme.** Soit g la fonction donnée par

$$g: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
3. En déduire que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \qquad \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$
4. Donner l'équation de la tangente en 1 de la courbe du logarithme.
5. En déduire que
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \ln(x) \leqslant x-1$$

1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0.$$
Donc la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$.
2. Comme la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$, on sait que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \ \ \forall t \in [0,1], \ \ f\big(tx+(1-t)y\big) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y),$$
c'est-à-dire
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \ \ \forall t \in [0,1], \ \ \ln\big(tx+(1-t)y\big) \geqslant t\ln(x)+(1-t)\ln(y).$$
En prenant $t=\frac{1}{2}$, on obtient alors que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
3. Soient $x,y \in]0,+\infty[$. On a montré que
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
En passant à l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient
$$\exp\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}\right)$$
c'est-à-dire
$$\frac{x+y}{2} \geqslant \exp\left(\ln(\sqrt{xy})\right),$$
c'est-à-dire
$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$
4. L'équation de la tangente en 1 de la courbe de la fonction g est donnée par
$$y = g'(0)(x-1)+g(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = x-1$$
5. Comme la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$, la courbe représentative de la fonction g est en-dessous de toutes ses tangentes, en particulier en-dessous de sa tangente en 1 donc,
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \ln(x) \leqslant x-1$$