

COLLE 23 - Semaine du 13/05 au 17/05

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours.

Chapitre XXII - Probabilité sur un univers infini

Ce chapitre consiste à généraliser toutes les notions vues dans le Chapitre "Probabilité sur un univers fini" au cas d'un univers infini.

- Notion d'univers, d'évènements, système complets d'évènements, opérations sur les évènements. Nouveauté : union/intersection d'un nombre infini d'évènements.
- Notion de probabilité, de probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes
- Notion d'indépendance

Chapitre XXIII - Calculs de Primitives

- Notion de primitive
- Existence d'une primitive, non unicité de manière générale, unicité sous condition
- Primitives des fonctions usuelles, primitives des composées
- Astuce pour déterminer les primitives d'une fonction rationnelle

Chapitre XXIV - Applications Linéaires (début)

- Définition d'une application linéaire
- Opérations sur les applications linéaires (somme, composition)
- Noyau d'une application linéaire, lien avec l'injectivité
- Image d'une application linéaire, savoir déterminer une base de l'image d'une application, lien avec la surjectivité (*cette partie a été uniquement vue en cours et pas encore traitée en TD*)

Informatique

- Calculs simples en python : +, -, *, /, **
- Définir une variable. Afficher une valeur avec print.
- Charger la bibliothèque numpy (`import numpy as np`), fonctions usuelles : `np.exp`, `np.log`, `np.sqrt`
- Instruction conditionnelle `if...elif...else`
- Les listes
- Boucles `for`
- Boucles `while`
- Fonctions
- Matrices
- Tracer des graphes grâce au module `Matplotlib`
- Recherche d'un élément dans une liste
- Algorithme de Dijkstra

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). *Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.*

Un énoncé :

- Propriété de σ -additivité d'une probabilité (Chap XXII - Définition 1.10, Point 3)
- Formule des probabilités totales (univers infini) (Chap XXII - Proposition 2.4)

- Définition d'une primitive (Chap XXIII - Définition 1.1)
- Non unicité de la notion de primitive (Chap XXIII - Proposition 2.2)

- Définition d'une application linéaire (Chap XXIV - Définition 1.1)

Un exercice :

- On dispose d'une grille infinie dont les lignes et les colonnes sont numérotées 1, 2, ... On place un jeton au hasard dans une case et on note, pour tout i et j dans \mathbb{N}^* , $A_{i,j}$ "le jeton est placé en ligne i et en colonne j ". On suppose que

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(A_{i,j}) = \frac{1}{e^{2j}(i-1)!}$$

Calculer la probabilité de l'évènement L_1 "le jeton est placé sur la ligne 1". (Chap. XXII - Exemple 1.11, Question 1)

- On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On lance la pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n "Le n -ième lancer donne Face" et A_n "Le premier Pile apparaît au n -ième lancer".

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$.

2. Montrer que la série $\sum P(A_n)$ converge et que sa somme vaut 1.

(Chap. XXII - Exemple 2.5, Questions 1 et 2)

- Donner une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré (Chap. XXIII - Exemple 3.3)

$$1. x \mapsto 3x^2 - 5x + 3 \text{ sur } \mathbb{R} \quad 2. x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \text{ sur }]-\infty, 0[\quad 3. x \mapsto e^{2x} + \frac{1}{3}x \text{ sur } \mathbb{R}$$

- Donner une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré (Chap. XXIII - Exemple 3.4)

$$1. x \mapsto x \exp(x^2) \text{ sur } \mathbb{R} \quad 2. x \mapsto (3x - 5)^4 \text{ sur } \mathbb{R} \quad 3. x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

- Montrer que l'application f suivante est linéaire, (Chap. XXIV - Exemple 1.7)

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y, x + 3y - z)$$