

TD 21 – APPLICATION DE LA DÉRIVABILITÉ

Théorèmes sur les fonctions dérivables

Exercice 1 – IAF. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall a, b \in]-\infty, k], \quad 0 \leq e^b - e^a \leq e^k(b - a).$$

Exercice 2 – Suites & IAF. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On considère également la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur \mathbb{R}_+ . *On ne demande pas de déterminer la valeur de α . On pourra appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*
3. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

4. Montrer que

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[, \quad |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|.$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

6. Démontrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}.$$

7. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 – Suites & IAF, Avec moins d'accompagnement. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha.$$

3. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 4 – Monotonie d'une fonction. On considère la fonction f définie sur son intervalle de définition \mathcal{D}_f par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

1. Déterminer \mathcal{D}_f le domaine de définition de la fonction f .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
3. En déduire l'allure de la courbe de f .

Exercice 5 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - 12).$$

Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur \mathbb{R} .

Exercice 6 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x - 1}.$$

Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Convexité & Concavité

Exercice 7 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 4xe^{-x}$$

1. Étudier les variations de f .
2. Étudier la convexité de f . Vérifier que f possède un point d'inflexion.
3. Tracer la courbe représentative de f et sa tangente au point d'inflexion. *On donne $e^{-1} \approx 0.368$ et $e^{-2} \approx 0.135$.*

Exercice 8 – Soit $h :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad h(x) = e^x - 2\ln(x + 1)$$

1. Montrer que h est convexe sur $] -1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geq 1 - x$.

Exercice 9 – On considère la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0, \quad g(t) = t^2 - t \ln(t)$$

Étudier la convexité de g . On précisera les éventuels points d'inflexion.

Exercice 10 – Ecricone 2006 S. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} \geq 1 - x$$

Exercice 11 – Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \ln(\ln(x)).$$

1. Montrer que f est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que,

$$\forall a, b \in]1, +\infty[, \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Pour aller plus loin

Exercice 12 – Maths II (CCIP). Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave sur $]0, 1[$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1, \quad g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 13 – EML S 2007. On considère l'application

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. On considère l'application

$$A : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

(b) Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$. *On admettra que*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

- (c) Dresser le tableau de variations de A .
- (d) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
- (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(x+1)^2} + 2\ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

- (b) Dresser le tableau de variations de B .
- (c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 14 – IAF pour l'étude d'une série. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = -\frac{1}{x},$$

et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.
(a) Montrer que

$$\forall x \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{(k-1)^2}.$$

- (b) En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$.
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq f(n) - f(1).$$

4. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 15 – On lance un dé deux fois de manière indépendante. On note, pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$, p_i la probabilité d'obtenir le numéro i lors d'un lancer. Montrer que c'est avec un dé non pipé (c'est-à-dire avec $p_1 = \dots = p_6 = 1/6$) que la probabilité d'avoir un double est minimale. *On pourra utiliser la propriété suivante.*

Soit f une fonction convexe sur I . Alors, pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de réels de I et pour tout n -uplet (t_1, \dots, t_n) de réels positifs tels que $t_1 + \dots + t_n = 1$, on a,

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Exercice 16 – Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \frac{2e^a e^b}{e^a + e^b} \leq e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

Exercice 17 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq |y - x|^2$$

Montrer que f est constante.