TD 21 – Application de la Dérivabilité

Théorèmes sur les fonctions dérivables

Exercice 1 – IAF. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \ \forall a,b \in]-\infty,k],\ \ 0 \leqslant \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^k(b-a).$$

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc}]-\infty,k] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

① La fonction f est dérivable sur $]-\infty,k]$ (et même sur $\mathbb{R}$...) et

$$\forall x \in]-\infty,k], \qquad f'(x) = \exp(x)$$

② De plus, par positivité de la fonction exponentielle et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in]-\infty,k], \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \exp(k)$$

Donc, d'après **l'inégalité des accroissements finis**, on a,

$$\forall a,b \in]-\infty,k], \qquad 0(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant \exp(k)(b-a)$$

c'est-à-dire,

$$\forall a,b \in]-\infty,k], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^k(b-a)$$

Exercice 2 – Suites & IAF. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$. On considère également la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n):\ « u_n \geqslant 0 ».$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 \geqslant 0.$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 0 \geqslant 0$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n \geqslant 0$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \geqslant 0$$

On sait que, par positivité de l'exponentielle

$$\begin{array}{lll} & \exp(-u_n) \geqslant 0 & \\ \text{donc} & 1+\exp(-u_n) \geqslant 1 & \\ \text{donc} & \ln(1+\exp(-u_n)) \geqslant 0 & \text{par croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0,+\infty[\\ \text{soit} & u_{n+1} \geqslant 0 & \text{d'après l'énoncé} \end{array}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0,2].$$

2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α. On pourra appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - x$$

On veut montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

① La fonction g est définie sur l'**intervalle** $[0,+\infty[$.
② La fonction g est **continue** sur $[0,+\infty[$.
③ Montrons que la fonction g est **strictement décroissante** sur $[0,+\infty[$.
(P) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$. et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x+2}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant 0$$

(E) L'équation $g'(x) = 0$ admet aucune solution sur $[0,+\infty[$.

- (De plus, $g(0) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$)

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,\ln(2)]$, c'est-à-dire

$$\forall y \in]-\infty,\ln(2)], \quad \exists! x \in [0,+\infty[, \quad y = g(x)$$

En particulier, en prenant $y = 0 \in]-\infty,\ln(2)]$, on obtient que

$$\exists! \alpha \in [0,+\infty[, \quad 0 = g(\alpha)$$

c'est-à-dire

$$\exists! \alpha \in [0,+\infty[, \quad f(\alpha) = \alpha$$

3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

La fonction $x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$$

De plus, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Donc, par composition, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

Soit $x \in [0,+\infty[$. On a

$$\begin{array}{lll} & x \geqslant 0 & \\ \text{donc} & \mathrm{e}^x \geqslant 1 & \text{car } x \mapsto \exp(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & 1+\mathrm{e}^x \geqslant 2 & \\ \text{donc} & \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{2} & \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[\end{array}$$

Ainsi, on a montré que

$$\text{pour tout } x \geqslant 0, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

4. Montrer que

$$\forall (a,b) \in [0,+\infty[, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|.$$

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction f car

① La fonction f est **dérivable** sur $[0,+\infty[$.
② Il existe $k = \frac{1}{2} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $|f'(x)| \leqslant k$ (cf question précédente)

Donc,

$$\forall (a,b) \in [0,+\infty[, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|.$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

D'après la question précédente,

$$\forall (a,b) \in [0,+\infty[, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $b = u_n$ et $a = \alpha$ dans l'inégalité précédente (car u_n et α appartiennent à $[0,+\infty[$), comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on obtient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

6. Démontrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n} \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^0} = \alpha$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ donc $|u_0 - \alpha| = \alpha \leqslant \alpha$ (car par construction $\alpha \geqslant 0$) Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \alpha| && \text{d'après la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{\alpha}{2^n} && \text{d'après l'H-R} \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}$$

7. En déduire la limite de la suite (u_n).

D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}$$

Or, par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$

Exercice 3 – Suites & IAF, Avec moins d'accompagnement. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1$ tel que
$$\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \alpha.$$
3. Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 4 – Monotonie d'une fonction. On considère la fonction f définie sur son intervalle de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$ et sur $]2,+\infty[$ et

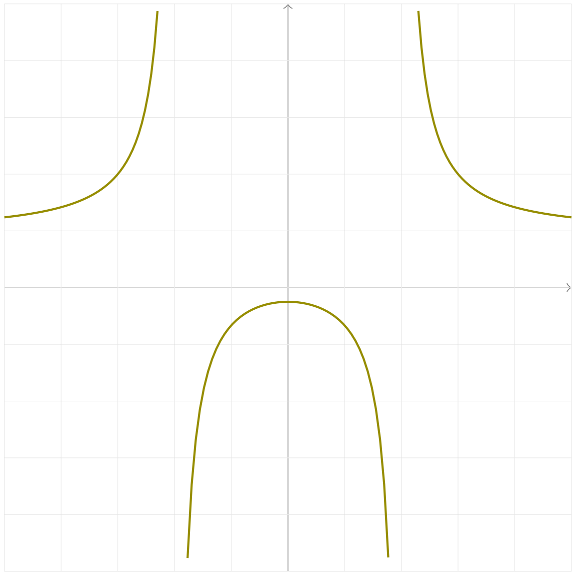
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}, \qquad f'(x) = -\frac{10x}{(x^2-4)^2}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Pour les limites en $\pm\infty$, on lève l'indétermination grâce à la factorisation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}, \qquad f(x) = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

2. En déduire l'allure de la courbe de f.



Exercice 5 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{4}x(x^2-12).$$

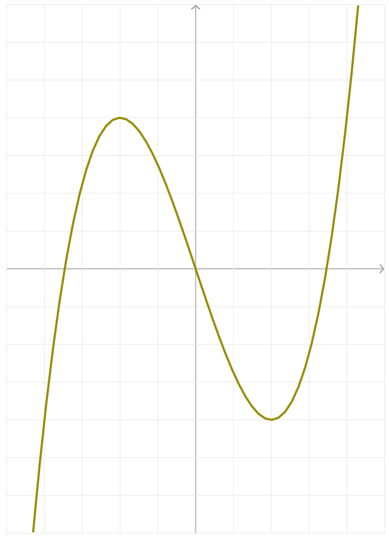
Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{3}{4}(x^2-4)$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

- Pas de minimum global car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- Pas de maximum global car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Un maximum local qui vaut 4 atteint en $x=-2$
- Un minimum local qui vaut -4 atteint en $x=2$



Exercice 6 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x-1}.$$

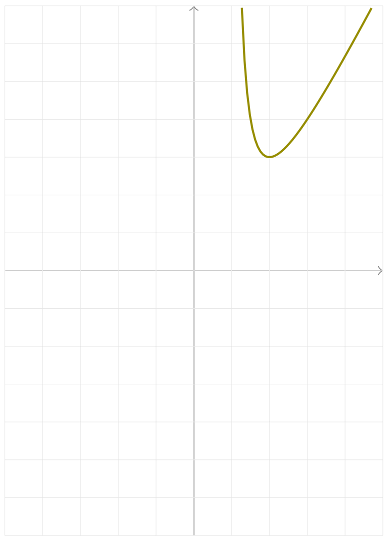
Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $]1,+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Pas de maximum global car $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$
- Un minimum global qui vaut 3 atteint en $x = 2$



Convexité & Concavité

Exercice 7 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 4xe^{-x}$$

1. Étudier les variations de f.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 4(1-x)e^{-x}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

2. Étudier la convexité de f. Vérifier que f possède un point d'inflexion.

   La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

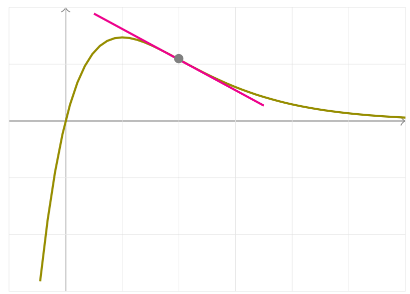
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = (4x-8)e^{-x}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   Donc f est concave sur $]-\infty, 2]$ puis convexe sur $[2,+\infty[$. Le point $(2, 8e^{-2})$ est un point d'inflexion pour la courbe représentative de f.

3. Tracer la courbe représentative de f et sa tangente au point d'inflexion. *On donne* $e^{-1} \approx 0.368$ *et* $e^{-2} \approx 0.135$.

   La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur $f'(2) = -4e^{-2} \approx -0.54$. Au point d'inflexion, la tangente «traverse» la courbe.



Exercice 8 – Soit $h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad h(x) = e^x - 2\ln(x+1)$$

1. Montrer que h est convexe sur $]-1,+\infty[$.

   - La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$.
   - La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ (car pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $x+1>0$) donc à fortiori de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$.

   Donc, par opérations, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et

   $$\forall x > -1, \qquad h'(x) = e^x - \frac{2}{x+1}$$

   puis,

   $$\forall x > -1, \qquad h''(x) = e^x + \frac{2}{(x+1)^2}$$

   Donc, on remarque que

   $$\forall x > -1, \qquad h''(x) \geqslant 0.$$

   Donc la fonction h est convexe sur $]-1,+\infty[$

2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geqslant 1-x$.

   Comme la fonction h est convexe sur $]-1,+\infty[$, sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier, au dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est donnée par

   $$y = h'(0)(x-0)+h(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = -x+1$$

   Donc, on en déduit que

   $$\forall x > -1, \qquad h(x) \geqslant -x+1$$

Exercice 9 – On considère la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0, \qquad g(t) = t^2 - t\ln(t)$$

Étudier la convexité de g. On précisera les éventuels points d'inflexion.

- Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc à fortiori de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Donc, par opérations, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall t > 0, \qquad g'(t) = 2t - (\ln(t) + t \times \frac{1}{t}) = 2t - 1 - \ln(t)$$

puis,

$$\forall t > 0, \qquad g''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}$$

On peut aller dresser le tableau de signe de g'' pour étudier la convexité de g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que

- la fonction g est concave sur $]0, \frac{1}{2}]$,
- la fonction g est convexe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$,
- la fonction g admet un point d'inflexion en $\frac{1}{2}$.

Exercice 10 – Ecricome 2006 S. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$$

Donc la fonction f est concave sur $\mathbb{R}$. Donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier, au dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est donnée par

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = -x + 1$$

Donc, on en déduit que

$$\forall x > -1, \qquad f(x) \geqslant -x + 1$$

c'est-à-dire

$$\forall x > -1, \qquad \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x.$$

Exercice 11 – Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \ln(\ln(x)).$$

1. Montrer que f est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que,

$$\forall a, b \in]1, +\infty[, \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Pour aller plus loin

Exercice 12 – Maths II (CCIP). Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction concave sur $]0,1[$ telle que $g(0)=0$ et $g(1)=1$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \geqslant 1, \qquad g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

La fonction g est concave sur $[0,1]$. Donc,

$$\forall u,v \in [0,1],\ \ \forall x \in [0,1],\ \ g\big(xu+(1-x)v\big) \geqslant xg(u)+(1-x)g(v).$$

Soient $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$. Prenons

$$u = 1-\frac{1}{n} \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad v = \frac{1}{n} \in [0,1]$$

donc l'inégalité précédente. On obtient alors directement que

$$g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 13 – EML S 2007. On considère l'application

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $[0,+\infty[$.

   - **Étude de la continuité de f sur $]0,+\infty[$.** La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]-1,+\infty[$ donc à fortiori sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ donc, en particulier sur $]0,+\infty[$. Donc, par produit la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
   - **Étude de la continuité de f en 0.** Il reste à étudier la continuité en 0. D'une part,

   $$f(0) = 1$$

   D'autre part,

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

   en utilisant le fait que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 donc que son taux d'accroissement en 0 tend vers la valeur de sa dérivée en 0. Finalement, on a montré que

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

   Donc f est également continue en 0.

2. On considère l'application

$$A : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que,

   $$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

   En raisonnant comme à la question 1, on obtient, par opérations que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus, sa dérivée est donnée par

   $$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2}$$

   (b) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser $f'(0)$. *On admettra que*

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Comme on a déjà montré à la question 2(a) que f était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, il s'agit juste ici d'étudier la dérivabilité en 0. On a

$$\forall x>0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

On en déduit donc que,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}.$$

Le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie (qui vaut $-1/2$), donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0)=-\frac{1}{2}.$$

(c) Dresser le tableau de variations de A.

La fonction A est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ (en particulier car pour tout $x\in[0,+\infty[$, $x+1\neq 0$ et $1+x>0$). De plus, sa dérivée est donnée par

$$\forall x\geqslant 0, \qquad A'(x)=\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{-x}{(1+x)^2}$$

Donc, on peut en déduire le tableau de signe de A' puis le tableau de variations de A de la manière suivante.

x	0		$+\infty$
$A'(x)$	0	$-$	
A	0	$\searrow$	$-\infty$

Dans le tableau de variations de A, on a rajouté la valeur $A(0)=0$ et la limite

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-\ln(1+x)=0-\infty=-\infty$$

(d) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Comme $A(0)=0$ et que A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ (cf question 2(c)), on en déduit que

$$\forall x>0, \qquad A(x)<0.$$

On en déduit, grâce à la question 2(a), que

$$\forall x>0, \qquad f'(x)=\frac{A(x)}{x^2}<0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Remarquons d'abord que

$$\forall x>0, \qquad f(x)=\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Or, par composition et produit de limites, on obtient directement que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}=0\times 0=0$$

De plus, par croissances comparées, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

Donc, finalement, par somme, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

3. On considère l'application

$$B:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, \qquad x\mapsto B(x)=-\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2}+2\ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que,

$$\forall x>0, \qquad f''(x)=\frac{B(x)}{x^3}$$

En raisonnant comme à la question 1, on montre que la fonction f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Et on a déjà calculer à la question 2(a) que

$$\forall x>0, \qquad f'(x)=\frac{A(x)}{x^2}$$

Donc, en dérivant cette égalité (la fonction A étant aussi dérivable sur $]0,+\infty[$), on obtient que,

$$\forall x>0, \qquad f''(x)=\frac{x^2A'(x)-2xA(x)}{x^4}$$

Or, en utilisant le calcul de A' effectué à la question 2(c), on obtient

$$\begin{aligned}\forall x>0, \qquad x^2A'(x)-2xA(x)&=-\frac{x^3}{(1+x)^2}-2x\left(\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)\right)\\&=\frac{-x^3-2x^2(1+x)}{(1+x)^2}+2x\ln(1+x)\\&=\frac{-3x^3-2x^2}{(1+x)^2}+2x\ln(1+x)\\&=xB(x)\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{xB(x)}{x^4} = \frac{B(x)}{x^3}$$

(b) Dresser le tableau de variations de B.

La fonction B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. De plus, après des calculs non détaillées, sa dérivée est donnée par

$$\forall x \geqslant 0, \qquad B'(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3}$$

Donc, on peut en déduire le tableau de signe de B' puis le tableau de variations de B de la manière suivante.

x	0		$+\infty$
$B'(x)$	0	$+$	
B	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Comme $B(0) = 0$ et que B est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (cf question 3(b)), on en déduit que

$$\forall x > 0, \qquad B(x) > 0.$$

On en déduit, grâce à la question 3(a), que

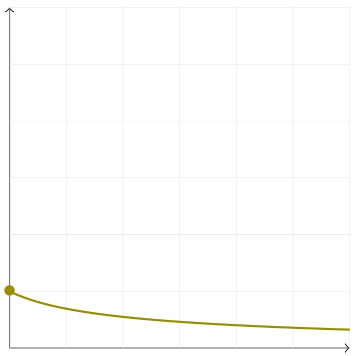
$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} > 0.$$

Donc f est convexe sur $]0, +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

On doit faire apparaître sur le graphe de cette fonction :

- que cette fonction est convexe,
- qu'elle vaut 1 en 0,
- qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.



Exercice 14 – IAF pour l'étude d'une série. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = -\frac{1}{x},$$

et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in [k-1, k], \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.$$
   (b) En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$.
3. En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1).$$
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 15 – On lance un dé deux fois de manière indépendante. On note, pour tout $i \in \{1, \ldots, 6\}$, p_i la probabilité d'obtenir le numéro i lors d'un lancer. Montrer que c'est avec un dé non pipé (c'est-à-dire avec $p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$) que la probabilité d'avoir un double est minimale. *On pourra utiliser la propriété suivante.*

> *Soit f une fonction convexe sur I. Alors, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels de I et pour tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ de réels positifs tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$, on a,*
>
> $$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Exercice 16 – Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \frac{2\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b}{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$$

Exercice 17 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(y) - f(x)| \leqslant |y-x|^2$$

Montrer que f est constante.