XXV. Variables Aléatoires

1 Loi d'une variable aléatoire 1
1.1 Notion de variable aléatoire . . . 1
1.2 Loi d'une variable aléatoire . . . 2
1.3 Transformation d'une variable aléatoire . . . 4
2 Moments d'une variable aléatoire 5
2.1 Espérance . . . 5
2.2 Variance . . . 8
2.3 Écart-type . . . 9
2.4 Interprétation graphique de l'espérance et la variance . . . 10
3 Lois usuelles finies 10
3.1 Variable aléatoire certaine . . . 10
3.2 Loi uniforme . . . 10
3.3 Loi de Bernoulli . . . 11
3.4 Loi de binomiale . . . 12
4 Lois usuelles infinies 14
4.1 Loi géométrique . . . 14
4.2 Loi de Poisson . . . 15

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé : Ω est un **univers**, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des **évènements** et $\mathbb{P}$ est une **probabilité** sur l'univers Ω.

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Notion de variable aléatoire

Définition 1.1 Une **variable aléatoire** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$, qui à chaque issue, associe un nombre réel telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant \omega\} \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ est un évènement. On note alors $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises. On dit que cette variable aléatoire est **finie** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est fini et **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est infini (dénombrable).

Définition 1.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On définit les évènements suivants :
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X = k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant k\}$.
- Pour tout $A \subset \Omega$, $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

Exemple 1.3 On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire qui, à tout lancer, associe la somme des deux résultats. On note, pour tout $k \in \{1,2\}$ et $n \in [\![1,6]\!]$, A_n^k l'évènement "Obtenir le chiffre n au k-ième lancer.

Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience) $\quad \Omega = [\![1,6]\!]^2$
Ensemble des valeurs prises par la v.a. S $\quad S(\Omega) = [\![2,12]\!]$

Alors,

$$[X = 2] = A_1^1 \cap A_1^2 \qquad [X = 3] = (A_1^1 \cap A_2^2) \cup (A_2^1 \cap A_1^2)$$
$$\dots \qquad \dots$$

Exemple 1.4 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. On note, pour tout $n \in [\![1,3]\!]$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer".

Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience)	Ω	=	...
Ensemble des valeurs prises par la v.a. X	$X(\Omega)$	=	$[\![0,3]\!]$

Alors,

$$[X=0] = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \overline{P}_3 \qquad [X=1] = P_1$$
$$[X=2] = \overline{P}_1 \cap P_2 \qquad [X=3] = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3$$

Exemple 1.5 On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1$ et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer".

Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience)	Ω	=	...
Ensemble des valeurs prises par la v.a. X	$X(\Omega)$	=	$\mathbb{N}$

Alors,

$$[X=0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{P}_k \qquad [X=1] = P_1$$
$$\dots \qquad \dots$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.6 La **loi de X** est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X=k])$ pour $k \in X(\Omega)$.

Exemple 1.7 — Cas fini. On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. La loi de X est donnée par

Valeurs de X	0	1	2	3
Probabilité	$\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{8}$	$\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$	$\mathbb{P}([X=2]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([X=3]) = \frac{1}{8}$

On remarque que

$$\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

Connaissant la loi de X, on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}([X=4]) = 0$$
$$\mathbb{P}([X \in \{0,1\}]) = P([X=0] \cup [X=1]) = P([X=0]) + P([X=1]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$
$$\mathbb{P}([X \geqslant 2]) = P([X=2] \cup [X=3]) = P([X=2]) + P([X=3]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbb{P}([X > 2]) = \mathbb{P}([X=3]) = \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{P}([X < 0]) = 0$$
$$\mathbb{P}([0 < X \leqslant 3]) = P([X=1] \cup [X=2]) \cup [X=3]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Exemple 1.8 — Cas discret infini. On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1[$. On note X le rang d'apparition du premier Pile. Déterminer la loi de X.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Ici,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Ici, déterminer la loi de X revient à calculer $\mathbb{P}([X = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par convention, $\mathbb{P}([X = 0]) = 0$ (ne jamais obtenir de pile est un évènement négligeable). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer", on a

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}(\overline{P}_1 \cap \cdots \cap \overline{P}_{k-1} \cap P_k)$$

Or, les lancers sont indépendants, c'est-à-dire que les évènements $(\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{k-1}, P_k)$ sont **mutuellement indépendants**. Donc,

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}(\overline{P}_1) \times \cdots \mathbb{P}(\overline{P}_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k)$$

Finalement, on obtient que

$$\mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1} p$$

On remarque que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}([X = k])$ converge (série géométrique) et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Conaissant la loi de X, on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}([X = 4]) = (1-p)^3 p$$

$$\mathbb{P}([X \in \{0,1\}]) = P([X = 0] \cup [X = 1]) = P([X = 0]) + P([X = 1]) = 0 + p = p$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant 5]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=5}^{+\infty} [X = k]\right) \\
&= \sum_{k=5}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) && \text{car les évènements sont disjoints} \\
&= \sum_{k=5}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \\
&= p \sum_{\ell=4}^{+\infty} (1-p)^{\ell} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= p(1-p)^4 \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^4
\end{aligned}$$

De la même manière, on a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X < 10]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{9} [X = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}([X = k]) && \text{car les évènements sont disjoints} \\
&= \sum_{k=1}^{9} (1-p)^{k-1} p \\
&= p \sum_{\ell=0}^{8} (1-p)^{\ell} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= p \frac{1-(1-p)^9}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^9
\end{aligned}$$

Proposition 1.9 Soit X une variable aléatoire discrète.
- La famille $([X = k])_{k\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements.
- La série $\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = k])$ converge et sa somme vaut 1.

Le deuxième point de la proposition précédente peut servir soit à *vérifier nos calculs*, soit à *trouver une probabilité manquante ou un paramètre manquant*.

Exemple 1.10 — Cas fini. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 10]\!]$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in [\![1, 10]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = ak^2$$

Déterminer la valeur du paramètre a.

On doit avoir

$$\sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}([X = k]) = a\sum_{k=1}^{10} k^2 = a \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385a.$$

Donc, on doit choisir

$$a = \frac{1}{385}$$

Exemple 1.11 — Cas discret infini. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{a}{3^k}$$

Déterminer la valeur du paramètre a.

On doit avoir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = a\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = a \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}a$$

Donc, on doit choisir

$$a = \frac{2}{3}$$

1.3 Transformation d'une variable aléatoire

Proposition 1.12 Soient X une variable aléatoire réelle sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω dont la loi est donnée par
- $Y(\Omega) = \{g(x), x \in X(\Omega)\}$
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}} \mathbb{P}([X = x])$$

Exemple 1.13 — Cas fini. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1])=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5])=\frac{1}{4}$

Donner la loi de $V=U^2$.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Tout d'abord,

x	-1	1	4	5
x^2	1	1	16	25

Donc,

$$V(\Omega)=\{1,16,25\}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Donc la loi de V est donnée par

Valeurs de V	1	16	25
Probabilité	$\mathbb{P}([V=1])=\frac{7}{12}$	$\mathbb{P}([V=16])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([V=25])=\frac{1}{4}$

Détaillons un des calculs.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([V=1]) &= \mathbb{P}\left(\left[U^2=1\right]\right)\\ &= \mathbb{P}([U=1]\cup[U=-1])\\ &= \mathbb{P}([U=1])+\mathbb{P}([U=-1]) && \text{par incompatibilité}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{3}\\ &= \frac{7}{12}\end{aligned}$$

Exemple 1.14 — Cas discret infini. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}([X=k])=(1-p)^{k-1}p$$

Déterminer la loi de $Y=2X-1$.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Tout d'abord,

x	1	2	3	4	...
$2x-1$	1	3	5	7	...

Donc,

$$Y(\Omega)=\{2k-1,\ k\in\mathbb{N}^*\}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=2k-1]) &= \mathbb{P}([2X-1=2k-1])\\ &= \mathbb{P}([X=k])\\ &= (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

2 Moments d'une variable aléatoire

2.1 Espérance

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω. On dit que X admet une **espérance** lors que la série

$$\sum_{k\in X(\Omega)} k\cdot\mathbb{P}([X=k])$$

converge *absolument*. Dans ce cas, l'**espérance** de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est la somme de cette série.

Une variable aléatoire finie admet forcément une espérance (car il n'y a qu'un nombre fini de termes dans la somme). Il faut vérifier la convergence *absolue* de la série seulement lorsque la variable aléatoire est discrète (infinie).

Proposition 2.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une espérance.

1. Si $X(\Omega)\subset[a,b]$ alors $a\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant b$.
2. Si X est une variable aléatoire à valeurs positives, c-à-d $X(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.
3. La variable aléatoire X est dite centrée lorsque $\mathbb{E}(X)=0$.
4. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $Y=aX+b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b$.

Exemple 2.3 — Cas fini. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1])=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5])=\frac{1}{4}$

Montrer que U admet une espérance et la calculer.

- **Étape 1 : Montrer que U admet une espérance.**
  Comme U est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance.
- **Étape 2 : Calculer l'espérance de U.** De plus, l'espérance de U est donnée par,

$$\mathbb{E}(U)=(-1)\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{4}=2$$

Exemple 2.4 — Cas fini. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ dont la loi est donnée par

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad \mathbb{P}([X=k])=\frac{2k}{n+n^2}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

- **Étape 1 : Montrer que X admet une espérance.**
  Comme X est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance.
- **Étape 2 : Calculer l'espérance de X.** De plus, l'espérance de X est donnée par,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\mathbb{P}([X=k])=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n+1}{3}$$

Exemple 2.5 — Cas discret infini. Soit $p\in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}([X=k])=(1-p)^{k-1}p$$

La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

On s'intéresse à la convergence de la série suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}|k\cdot P([X=k])|\quad\text{c-à-d}\quad\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left|k\cdot(1-p)^{k-1}p\right|\quad\text{c-à-d}\quad p\sum_{k\in\mathbb{N}^*}k(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente car de paramètre $p\in]-1,1[$. Donc, la série $\sum k\cdot P([X=k])$ converge **absolument** et la variable X admet une espérance qui est donnée par

$$\mathbb{E}(X)=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}=p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}$$

Exemple 2.6 — Cas discret infini. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$$

La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

On s'intéresse à la convergence de la série suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} |k \cdot P([X = k])| \quad \text{c-à-d} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left| k \cdot \frac{1}{k(k+1)} \right| \quad \text{c-à-d} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k+1}$$

Or la série $\sum \frac{1}{k+1}$ ne converge pas absolument(série de Riemann d'exposant 1). Donc la série $\sum k \cdot P([X = k])$ ne converge pas absolument. Donc la variable X n'admet pas d'espérance.

Proposition 2.7 — Théorème de transfert. Soient X une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{k\in X(\Omega)} g(k) \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

converge *absolument*. Dans ce cas, $\mathbb{E}(g(X))$ est la somme de cette série.

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans déterminer sa loi.

Exemple 2.8 — Cas fini. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1, 4, 5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U = 4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U = 5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que $V = U^2$ admet une espérance et la calculer.

- **Étape 1 : Montrer que U admet une espérance.**
  Comme V est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance.
- **Étape 2 : Calculer l'espérance de V.** De plus, par théorème de transfert, l'espérance de V est donnée par,

$$\mathbb{E}(V) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{4} = \frac{19}{2}$$

Précédemment, on avait déterminé la loi de V de la manière suivante

Valeurs de V	1	16	25
Probabilité	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

On retrouve alors que

$$\mathbb{E}(V) = 1 \times \frac{7}{12} + \frac{16}{6} + \frac{25}{4} = \frac{19}{2}$$

Exemple 2.9 — Cas discret infini. Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1} p$$

La variable aléatoire $Y = X^2$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Notons $q = 1-p \in]0,1[$. On s'intéresse à la convergence de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} |k^2 \cdot P([X=k])| \quad \text{c-à-d} \quad p\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 q^{k-1}$$

Or,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad k^2 q^{k-1} = k(k-1)q^{k-1} + kq^{k-1} = qk(k-1)q^{k-2} + kq^{k-1}$$

Or la série $\sum k(k-1)q^{k-2}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 2 qui converge car $q \in]-1,1[$ et a série $\sum kq^{k-1}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 1 qui converge aussi car $q \in]-1,1[$. Donc, par opérations sur les séries à termes positifs, la série $\sum k^2 q^{k-1}$ converge, c'est-à-dire la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 \cdot P([X=k])$$

converge absolument. Donc, la variable aléatoire $Y = X^2$ admet une espérance et son espérance est donnée par

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot P([X=k]) \\ &= pq\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= pq \times \frac{2}{(1-q)^3} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

2.2 Variance

Définition 2.10 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω. On dit que X admet une **variance** lorsque

- X admet une espérance
- et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet aussi une espérance.

Dans ce cas, la variance de X est donnée par

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Une variable aléatoire finie admet forcément une variance.

Proposition 2.11 — Formule de Koenig-Huygens. Soit X une variable aléatoire réelle discrète.
Si

- X admet une espérance,
- et X^2 admet une espérance,

alors X admet une variance et dans ce cas,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Proposition 2.12 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une variance.

1. Alors $V(X) \geqslant 0$.
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.
3. Lorsque $V(X) = 1$, X est dite réduite.

Exemple 2.13 — Cas fini. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que U admet une variance et la calculer.

Comme U est une variable aléatoire **finie**, elle admet une variance. De plus, on a déjà calculé que (cf Exemples 2.3 et 2.8),

$$\mathbb{E}(U) = 2 \qquad \text{et} \qquad E(U^2) = \frac{19}{2}$$

Donc, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, la variance de U est donnée par

$$V(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{19}{2} - 4 = \frac{11}{2}$$

Exemple 2.14 — Cas discret infini. Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X=k]) = (1-p)^{k-1}p$$

La variable X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

On a déjà montré que (cf Exemple 2.5) X admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

On a aussi montré que (cf Exemple 2.9) X^2 admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Donc, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, X admet une variance qui vaut

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

2.3 Écart-type

Définition 2.15 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart-type de X est le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 2.16 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle. Alors,

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée - c-à-d $\mathbb{E}(X^*) = 0$ - et réduite - c-à-d $V(X^*) = 1$-, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X.**

Démonstration. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle et

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire centrée. Par **linéarité** de l'espérance, on a,

$$\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\left(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\right) = 0$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire réduite. On a,

$$V(X) = V\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X) = 1$$

■

2.4 Interprétation graphique de l'espérance et la variance

L'espérance représente la *moyenne* de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire. La variance et l'écart-type mesurent l'écart entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance, ce sont des mesures de *dispersion*.

3 Lois usuelles finies

3.1 Variable aléatoire certaine

Définition 3.1 Une variable aléatoire **certaine** est une variable aléatoire finie qui ne prend qu'une seule valeur. Autrement dit, c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\{a\}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ dont la loi est donnée par,

$$\mathbb{P}([X = a]) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{R}\backslash\{a\},\ \mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = 0$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire certaine à valeurs dans $\{a\}$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = a \times \mathbb{P}([X = a]) = a$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - a^2$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = a^2 \times \mathbb{P}([X = a]) = a^2$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = 0.$$

■

3.2 Loi uniforme

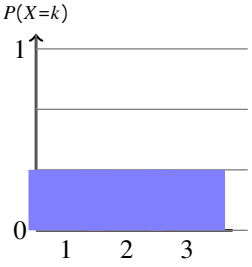
Définition 3.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $[\![1, n]\!]$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

? Cette loi permet de modéliser des situations d'**équiprobabilité**. Par exemple, si on lance un dé équilibré à six faces et que l'on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$. Cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{(n+1)^2}{4}$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

■

Définition 3.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a < b$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $\llbracket a,b \rrbracket$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\llbracket a,b \rrbracket$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in \llbracket a,b \rrbracket, \qquad \mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{b-a+1}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

3.3 Loi de Bernoulli

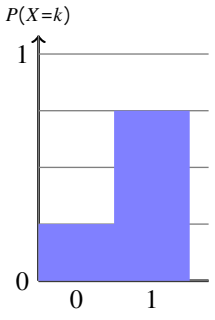
Définition 3.4 Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X **de Bernoulli de paramètre** p est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0,1\}$ dont la loi est donnée par,

$$\mathbb{P}([X=1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X=0]) = 1-p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : **le succès et l'échec**, avec une probabilité p d'obtenir un succès. On associe à cette expérience la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Alors X suit une loi $\mathcal{B}(p)$. Par exemple, pour $p = \frac{1}{3}$, cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}([X=1]) + 0 \cdot \mathbb{P}([X=0]) = p$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \mathbb{P}([X = 1]) + 0^2 \cdot \mathbb{P}([X = 0]) = p$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

■

Exemple 3.5 On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de X.

Par construction, la variable aléatoire est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, comme les lancers de dés suivent une loi uniforme,

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{\text{nbre issues qui nous intéressent}}{\text{nbre issues totales}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

et

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{\text{nbre issues qui nous intéressent}}{\text{nbre issues totales}} = \frac{36-6}{36} = \frac{5}{6}$$

Donc, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

3.4 Loi de binomiale

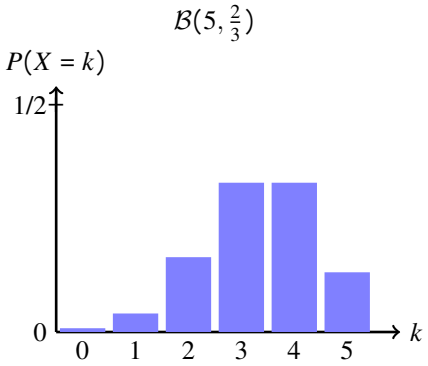
Définition 3.6 Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **binomiale de paramètres** n **et** p est une variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ dont la loi est donnée par,

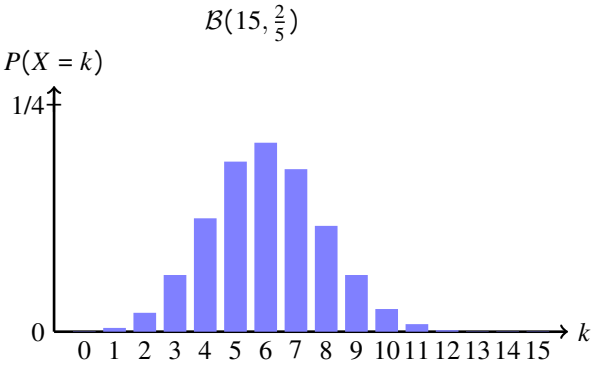
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : le **succès et l'échec**. On **répète** n fois une telle épreuve de manière identique et indépendante. On associe à cette expérience la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus alors de ces n épreuves. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Ces situations peuvent être représentées par des diagrammes en barres comme ceux ci-dessous.





Preuve de l'espérance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Comme X est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Donc, finalement, on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} && \text{grâce au binôme de Newton} \\
&= np
\end{aligned}$$

■

Preuve de la variance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Comme X^2 est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par, d'après le **théorème de transfert**,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}
k^2\binom{n}{k} &= k(k-1)\binom{n}{k} + k\binom{n}{k} \\
&= \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} + k\binom{n}{k} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} + k\binom{n}{k} \\
&= n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + k\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \mathbb{E}(X) + \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^{\ell+2} (1-p)^{n-\ell-2} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-2 \\
&= np + n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-2-\ell} \\
&= np + n(n-1)p^2 (1+1-p)^{n-2} && \text{grâce au binôme de Newton} \\
&= np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Comme X est une variable aléatoire finie, X admet une variance et d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, elle vaut,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

■

Exemple 3.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus. Donner la loi de X.

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on lance un dé, on obtient un 6 (le succès) avec probabilité $1/6$ et on n'obtient tout sauf un 6 (échec) avec probabilité $5/6$.
- On répète n fois cette expérience, de manière identique et indépendante.
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.

Exemple 3.8 On réalise 10 tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues. Donner la loi de X.

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on fait un tirage, on obtient une boule bleue (le succès) avec probabilité $3/8$ et on obtient une boule rouge (échec) avec probabilité $5/8$.
- On répète 10 fois cette expérience, de manière identique et indépendante (car tirage avec remise).
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{B}(10, \frac{5}{8})$.

4 Lois usuelles infinies

4.1 Loi géométrique

Définition 4.1 Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X **géométrique de paramètre** p est une variable aléatoire discrète (infinie) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1} p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Cette variable admet une espérance et une variance qui valent

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : le **succès et l'échec**, la probabilité d'obtenir un succès étant de p. On **répète** une **infinité** de fois une telle épreuve de manière identique et indépendante. On associe à cette expérience la variable aléatoire X égale au **rang du premier succès** obtenus alors de ces épreuves. Alors X suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Ces situations peuvent être représentées par des diagrammes en barres comme ceux ci-dessous.

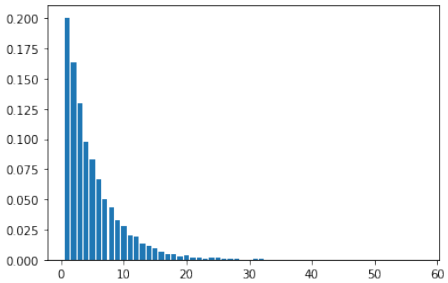


Diagramme pour $p = 0.2$

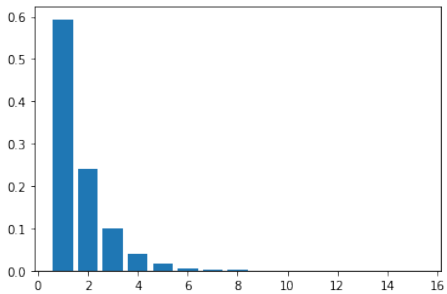


Diagramme pour $p = 0.6$

Exemple 4.2 Voir Exemple 1.8.

Exemple 4.3 On dispose de deux dés équilibrés que l'on lance en même temps une infinité de fois. On note X le nombre de lancers nécessaire à l'obtention d'un double 6. Déterminer la loi de X.

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on lance deux dés, on obtient un double six (le succès) avec probabilité $1/36$ (car les lancers sont uniformes et indépendants).
- On répète une infinité de fois cette expérience, de manière identique et indépendante.
- La variable aléatoire X compte le rang du premier succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{G}(\frac{1}{36})$.

4.2 Loi de Poisson

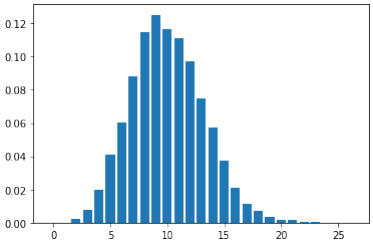
Définition 4.4 Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X **de Poisson de paramètre** λ est une variable aléatoire discrète (infinie) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Cette variable admet une espérance et une variance qui valent

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda$$

? Cette loi n'a pas de modèle type. Elle intervient quand on modélise le nombre de personnes arrivant dans une file d'attente pendant un temps donné (sous certaines conditions) De telles situations peuvent être représentée par un diagramme en barres omme ci-contre.



Preuve de l'espérance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrons d'abord que X admet une espérance.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |k \cdot \mathbb{P}([X = k])| = \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Donc la série $\sum k \cdot \mathbb{P}([X = k])$ converge absolument car on reconnaît une série exponentielle. Donc la variable aléatoire X admet une espérance et celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}([X = k]) \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

■

Preuve de la variance. Montrons que X admet une variance. D'après le **théorème de Koenig-Huygens**, il suffit de montrer que X^2 admet une espérance. D'après le **théorème de transfert**, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

converge absolument. Or, on a,

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \quad |k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k])| &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k \times \frac{k(k-1)+k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

Donc, par somme de deux séries exponentielles, la série $\sum k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k])$ converge absolument et X^2 admet une espérance et celle-ci vaut,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \mathrm{e}^{\lambda} \\ &= \lambda^2 + \lambda\end{aligned}$$

Comme X et X^2 admettent une espérance, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, X admet une variance qui vaut

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

■