1 Linéarité d'une application

Exercice 1 –

Exercice 2 –

Exercice 3 –

i) Non ii) Oui

iii) Non iv) Oui

2 Noyau d'une application et injectivité

Exercice 4 –

i) $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$
Base : $((1,1,-1))$

ii) $\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$
Base : $((-1,1,0),(-1,0,1))$

Exercice 5 –

i) $\mathrm{Ker}(f_1) = \{(0,0)\}$
Injectivité : Oui

ii) $\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$
Injectivité : Non

3 Image d'une application et surjectivité

Exercice 6 –

i) $\mathrm{Im}(f_1) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid -2a+b+c=0\}$
Surjectivité : Non

ii) $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^2$
Surjectivité : Oui

Exercice 7 –

i) Base de $\mathrm{Im}(f_1)$: $((1,1,3),(-2,-1,-7))$
Surjectivité : Non

ii) Base de $\mathrm{Im}(f_2)$: $((2,0,0),(1,1,0),(-1,-3,2))$
Surjectivité : Oui

4 Théorème du rang

Exercice 8 –

1. Suivre Méthode 2.
2. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1
3. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2
4. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $((2,-1,-1),(-1,2,-1))$
5. L'application f est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 9 –

1. Suivre Méthode 2.
2. Base de l'image : $((1,-1,0,1),(0,1,1,1))$ donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2
3. Le noyau est donc de dimension 1.
4. Base du noyau : $((-1,-1,1))$
5. L'application f est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 10 –

- $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$
- Les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée sont les mêmes.

Donc f est bijective.

5 Lien avec les matrices

Exercice 11 –

1. $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}((-3,1,1))$, $\mathrm{rg}(M) = 2$ et $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$.
2. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-3,1,1))$, $\mathrm{rg}(f) = 2$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$.
3. M est la matrice canoniquement associée à f.