TD 25 – Variables Aléatoires

Savoir déterminer et manipuler une loi

Exercice 1 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement, sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X. *On pourra la représenter dans un tableau.*
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

Exercice 2 – Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. Que vaut $\mathbb{P}(X < -1)$?
2. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$?
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance de X.
5. Déterminer la loi de $Y = |X-1|$.

Exercice 3 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Vérifier que $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$.

Exercice 4 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X=k]) = a3^{-k}$$

1. Déterminer la valeur du paramètre a.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3. X a t-elle plus de chance de prendre une valeur paire ou une valeur impaire ?
4. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 5 – Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, …, n, … et on fait les hypothèses suivantes.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la sauteur passe la hauteur n (s'il arrive à ce stade) est $\frac{1}{n}$.
- Il est éliminé dès qu'il manque un saut.

On admet que le perchiste est presque sûrement éliminé au bout d'un nombre fini de sauts. Soit alors X le nombre de sauts réussis par le perchiste.

1. Déterminer la loi de X.
2. À l'aide du théorème de transfert, montrer que $Y = X+1$ admet une espérance et la calculer.
3. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 6 – On considère un jeu de 52 cartes traditionnel et on pioche une carte au hasard dans le paquet. On note alors X la valeur de la carte piochée avec la valeur 1 pour un as, 2 pour un deux, ... , 10 pour un dix, 11 pour un valet, 12 pour une dame et 13 pour un roi. Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 7 – On considère un jeu de 32 cartes traditionnel et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirées sont de même valeur, on dit qu'il y a "bataille" et on pose $B = 1$, dans le cas contraire, on pose $B = 0$. Donner la loi de B. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 8 – On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 9 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Donner $Y(\Omega)$.
2. Soient $i \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k])$.
3. En déduire la loi de Y. *On pourra utiliser la formule des probabilités totales.*
4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 10 – Dans une urne composée de 2 boules rouges et de 3 boules bleues, nous tirons une infinité de boules. Les tirages se font avec remise et sont supposés indépendants. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue pour la première fois. Déterminer la loi de N et son espérance.

Exercice 11 – On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{\mathrm{e}k!}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la déterminer.
2. Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.
3. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Type Concours

Exercice 12 – On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer" et $F_n = \overline{P_n}$,
- On note X la variable aléatoire qui prend n comme valeur (pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) lorsque l'on obtient pour la première fois Pile puis Face dans cet ordre aux lancers $n-1$ et n. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si une telle combinaison n'arrive jamais.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}([X=2])$.
3. On cherche dans cette question à déterminer la loi de X.
   (a) Décrire l'évènement $[X=3]$ à l'aide des évènements P_k et F_k puis calculer cette probabilité.
   (b) Écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, l'évènement $[X=n]$ comme une union de $n-1$ évènements incompatibles.
   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3, \qquad \mathbb{P}([X=n]) = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   (d) Vérifier que la relation de la question précédente est encore valable pour $n = 2$.
   (e) Déterminer des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$. Interpréter le résultat.
4. Dans cette question, on se propose de retrouver la loi de X par une autre méthode.
   (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on a
   $$\mathbb{P}([X=n+1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([X=n]) + \frac{1}{2^{n+1}}$$
   (b) On poise, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $u_n = 2^n \mathbb{P}([X=n])$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmétique.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, l'expression de $\mathbb{P}([X=n])$.
5. Justifier que X admet une espérance et la calculer.