DS 4

Vendredi 13 février 2026, de 13h à 16h00.

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Simplifier les quantités suivantes au maximum.

$$\text{a. } \frac{(2n+1)!}{2n!} \qquad \text{b. } \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes.

$$\text{a. } (2x+1)^4 \qquad \text{b. } (x^2-1)^3$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$\text{a. } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} \qquad \text{b. } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ \ln(x)+2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

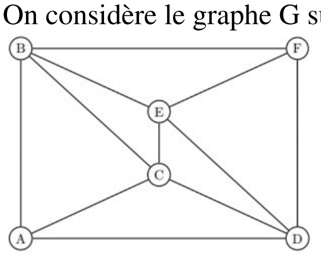
   Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

5. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x)-2 \end{array}$$

   Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

6. On considère le graphe G suivant :



   (a) Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
   (b) Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes? Si oui, en préciser une.
   (c) Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

(d) On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

(f) Déterminer la distance entre A et F

7. Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules jaunes. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

   (a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité (on pourra nommer R_1 l'évènement "la première boule est rouge" et R_2 l'évènement "la deuxième boule est rouge")

   (b) Déterminer la loi de X .

   (c) Déterminer l'espérance de X.

   (d) Déterminer la variance de X.

8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \exp(u_n)$$

   Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10^6$.

Exercice 2 – Dans une région, chaque jour, il y a du soleil, ou il pleut. Pour tout $n \geqslant 1$, on note S_n l'événement "Il y a du soleil le jour n". On suppose que :
- s'il y a du soleil un jour, alors la probabilité qu'il y ait du soleil le lendemain vaut $\frac{1}{3}$;
- s'il pleut un jour, alors la probabilité qu'il y ait du soleil le lendemain vaut $\frac{3}{5}$.

Au premier jour de l'étude ($n = 1$), on suppose qu'il y a du soleil.

1. Que dire de l'événement S_1 ? Quelle est sa probabilité?
2. Pour tout $n \geqslant 1$, donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $\mathbf{P}_{S_n}(S_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$.
3. Déterminer $\mathbf{P}(S_2)$, puis $\mathbf{P}(S_3)$.
4. Sachant qu'il y a eu du soleil au jour 3, quelle est la probabilité qu'il ait plu la veille?
5. On note, pour tout $n \geqslant 2, P_n$ l'événement " il pleut tous les jours du jour 2 au jour n."
   (a) Exprimer P_n en fonction des événements $S_2, \cdots, S_n$.
   (b) En déduire l'expression de $\mathbf{P}(P_n)$ en fonction de $n \geqslant 2$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, on note : $u_n = \mathbf{P}(S_n)$. On rappelle que u_1 a été calculé question **1**.
   (a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = -\frac{4}{15}u_n + \frac{3}{5}$.
   (b) Écrire en langage Python une fonction d'argument n renvoyant la valeur de u_n.
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
7. Dans une mare, une grenouille chante 4 fois sur 5 s'il pleut, et 1 fois sur 5 s'il ne pleut pas. Déterminer la probabilité c_n pour que la grenouille chante le jour n.

Exercice 3 – Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1.$$

   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
   (c) Démontrer que: $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$.
   (d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Écrire une fonction Python qui prend en argument un réel u0 et un entier n et renvoie la liste des $n + 1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ u0.
3. (a) Étudier le signe de $(x - 1)\ln x$ pour $x > 0$.
   (b) Montrer que: $\forall x > 0, \frac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
   Indication: On pourra d'abord montrer que, $\forall x > 0, \frac{g(x)}{x} = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)$
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.
4. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.
   (a) Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
6. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. (a) Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.