DS 7

Vendredi 17 mai, de 13h30 à 17h30

*La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la clarté et la **précision** des raisonnements entreront pour une part important dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats.*

• Exercice 1 - Espaces vectoriels *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On considère les vecteurs

$$u=(0,-1,3) \qquad u_1=(1,0,1) \qquad u_2=(1,-1,2) \qquad u_3=(2,1,-1)$$

ainsi que,

$$e_1=(1,0,0) \qquad e_2=(0,1,0) \qquad e_3=(0,0,1)$$

   (a) Montrer que u est une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3.
   (b) Montrer que u est une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3.
   (c) Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_3.

2. On considère les ensembles F et G donnés par

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y-3z=0\} \qquad \text{et} \qquad G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Donner un élément non nul de F.
   (d) Donner un élément de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à F.

3. On considère les vecteurs suivants,

$$u=(1,2,3) \qquad v=(-1,0,2) \qquad w=(0,1,2) \qquad t=(3,2,-1)$$

   (a) Montrer que la famille (u,v,w) est libre.
   (b) Montrer que la famille (u,v,t) n'est pas libre.

4. On considère les vecteurs

$$u=(-1,2,0) \qquad v=(3,-5,-1) \qquad w=(0,1,-2)$$

   Montrer que la famille (u,v,w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

5. Trouver une base de chacun des espaces suivants,

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y-3z=0\}$$

   et

$$H=\mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,1),(3,-2,3))$$

• Exercice 2 - Espaces vectoriels

On considère l'ensemble

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+2z-2t=0\}.$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.
2. En déduire la dimension de F.
3. On considère la famille $\mathscr{B}=((0,-4,1,3),(3,-1,-2,0))$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
   (b) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de F.

• Exercice 3 - Probabilités

•• Première expérience (univers fini)

Une personne envoie **un** courrier électronique par l'intermédiaire au hasard soit du serveur A, soit du serveur B. La probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A est de $7/10$. De plus, la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $1/10$ alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de $5/100$. On note A l'évènement "Le message est envoyé avec le serveur A", B l'évènement "Le message est envoyé avec le serveur B" et E l'évènement "Le message est envoyé avec une erreur".

1. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur B ?
2. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A et qu'il contienne une erreur ?
3. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec une erreur ?
4. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A ou qu'il contienne une erreur ?
5. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A sachant qu'il a une erreur ?

•• Deuxième expérience (univers infini)

Cette fois-ci, une personne envoie **une infinité** de courrier électronique. Les choix des serveurs sont indépendants les uns des autres. Pour chaque message, la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A est toujours de $7/10$. De plus, pour chaque message, la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est encore de $1/10$ alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est toujours de $5/100$.

Pour chaque message envoyé, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3,4 et 5, il a choisi le serveur B, le jour 6, le serveur A et ainsi de suite. Dans une telle suite, on dit qu'on a une première série de longueur n si on a choisit le même serveur les n premiers jours et l'autre serveur le $n+1$-ième jour. On définit de même la longueur de la deuxième série. Par exemple, pour la suite AABBBA... on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3; pour la suite BBAAAB... on a également une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3; pour la suite BBBBAAB.... on a une première série de longueur 4 et une deuxième série de longueur 2.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "Le serveur A est choisi le k-ième jour".
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'évènement "Le serveur B est choisi le k-ième jour".
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n l'évènement "La première série est de longueur n". Par exemple, L_4 est réalisé si pendant les 4 premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le 5 jour, c'est l'autre serveur qui a été choisi.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n l'évènement "La deuxième série est de longueur n".

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $P(A_k)$?
2. Justifier que
$$L_3 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4)$$
3. En déduire que
$$P(L_3) = \frac{609}{5000}$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire l'évènement L_n à l'aide de certains des évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(L_n)$.
6. Vérifier par le calcul que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_n) = 1$$
en justifiant au préalable l'existence de cette somme.
7. Justifier que la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(L_n)$$
converge et calculer sa somme. *Cette valeur peut s'interpréter comme la longueur moyenne de la première série de serveurs.*
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on cherche à calculer $P(M_n)$.
   (a) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_k \cap M_n)$.
   (b) En déduire, à l'aide d'une formule que l'on nommera, la valeur de $P(M_n)$.

• Exercice 4 - Probabilités (Ecricome 2023)

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un second tirage d'une boule dans la seconde urne. On note, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

- X_k l'évènement "La première boule tirée porte le numéro k"
- Y_k l'évènement "La deuxième boule tirée porte le numéro k".

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Donner, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P(X_k)$.
2. Calculer la somme suivante
$$\sum_{k=1}^{n} k \times P(X_k)$$
3. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.
   (a) On suppose que l'évènement X_k est réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier $j \in \{1, \ldots, n\}$, exprimer $P_{X_k}(Y_j)$ en fonction de k et j. *On distinguera les cas $j \leqslant k$ ou $j \geqslant k+1$.*
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $j \in \{1, \ldots, n\}$,
$$P(Y_j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$
5. Montrer que
$$\sum_{j=1}^{n} j \times P(Y_j) = \frac{n+2}{3}$$

• Exercice 5 - Primitives

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \ln(x) \end{array}$$

1. Justifier que f admet une primitive sur $]0,+\infty[$.
2. Combien de primitives la fonction f admet-elle sur $]0,+\infty[$?
3. On considère la fonction
$$F : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3(3\ln(x)-1)}{9} \end{array}$$
   Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0,+\infty[$.
5. Déterminer la primitive G de f sur $]0,+\infty[$ qui vérifie $G(1) = 0$.

• Exercice 6 - Primitives

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles considérés.

a) $x \mapsto x^5 + 2$ sur $\mathbb{R}$

b) $x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$

c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{-3x}$ sur $]0, +\infty[$

d) $x \mapsto 2(x+1)\exp(x^2 + 2x)$ sur $\mathbb{R}$

e) $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

f) $x \mapsto (1-7x)^4$ sur $\mathbb{R}$

g) $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

h) $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$

• Exercice 7 - Primitives

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{5x^2+21x+22}{x^3+5x^2+3x-9} \end{array}$$

1. Montrer que -3 est une racine du polynôme $P : x \mapsto x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.
2. Déterminer trois réels α, β et γ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+3)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$
3. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)(x+3)^2.$$
4. Déterminer trois réels a, b et c tels que
$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$
5. En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.
6. Déterminer la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.