DS 4

Exercice 1 – Questions de cours.

Exercice 2 – .

1. Il y a du soleil le premier jour, donc S_1 est un événement certain : $\mathbf{P}(S_1) = 1$.
2. D'après l'énoncé : $\forall n \geqslant 1, \mathbf{P}_{S_n}(S_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = \frac{3}{5}$.
3. $\mathbf{P}(S_2) = \frac{1}{3}$ car S_1 est certain. $(S_2, \overline{S_2})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_3) &= \mathbf{P}(S_2) \times \mathbf{P}_{S_2}(S_3) + \mathbf{P}\left(\overline{S_2}\right) \times \mathbf{P}_{\overline{S_2}}(S_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{5} \quad \text{donc}\, \mathbf{P}(S_3) = \frac{23}{45}.\end{aligned}$$

4. On demande $\mathbf{P}_{S_3}\left(\overline{S_2}\right) = 1 - \mathbf{P}_{S_3}(S_2) = 1 - \frac{\mathbf{P}(S_2)}{\mathbf{P}(S_3)} \times \mathbf{P}_{S_2}(S_3)$ d'après la formule de Bayes, donc $\mathbf{P}_{S_3}\left(\overline{S_2}\right) = 1 - \frac{1/3}{23/45} \times \frac{1}{3}$, $\quad \mathbf{P}_{S_3}\left(\overline{S_2}\right) = \frac{18}{23}$.
5. (a) $\forall n \geqslant 2, P_n = \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_n}$, soit : $\forall n \geqslant 2, P_n = \bigcap_{k=2}^{n} \overline{S_k}$.
(b) D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \mathbf{P}(P_n) &= \mathbf{P}\left(\overline{S_2}\right) \times \mathbf{P}_{\overline{S_2}}\left(\overline{S_3}\right) \times \cdots \times \mathbf{P}_{\overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}}}\left(\overline{S_n}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \cdots \times \frac{2}{5}, \quad \text{donc } \forall n \geqslant 2, \mathbf{P}(P_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

6. (a) Soit $n \geqslant 1$. Alors $(S_n, \overline{S_n})$ est un SCE. D'après la FPT :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(S_{n+1}) = \mathbf{P}(S_n) \times \mathbf{P}_{S_n}(S_{n+1}) + \mathbf{P}\left(\overline{S_n}\right) \times \mathbf{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) \\ &u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{3} + (1 - u_n) \times \frac{3}{5} \quad \text{donc } \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = -\frac{4}{15} u_n + \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

(c) $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe ℓ : $\ell = -\frac{4}{15}\ell + \frac{3}{5}$ donne $\ell = \frac{9}{19}$. La suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison $q = -\frac{4}{15}$. $\forall n \geqslant 1, v_n = v_1 \times q^{n-1}$ avec $v_1 = u_1 - \ell = \frac{10}{19}$. En conclusion, $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{10}{19} \times \left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1} + \frac{9}{19}$.
(d) $-1 < -\frac{4}{15} < 1$ donc $\lim \left(-\frac{4}{15}\right)^{n-1} = 0$. Par opérations, $\lim u_n = \frac{9}{19}$.
7. Soit $n \geqslant 1$. On nomme C_n l'événement : "la grenouille chante le jour n ". $\left(S_n, \overline{S_n}\right)$ est un SCE. D'après la FPT :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C_n) &= \mathbf{P}(S_n) \times \mathbf{P}_{S_n}(C_n) + \mathbf{P}\left(\overline{S_n}\right) \times \mathbf{P}_{\overline{S_n}}(C_n) \\ &= u_n \times \frac{1}{5} + (1 - u_n) \times \frac{4}{5} = -\frac{3}{5} u_n + \frac{4}{5}. \quad \text{Conclusion : } \forall n \geqslant 1, c_n = -\frac{3}{5} u_n + \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Exercice 3 – Partie I : Étude de la fonction g

1. On sait que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \to 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty$;
de plus, $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$,
donc $\lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$.
Comme $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, alors par composition :

$$\lim_{x \to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = +\infty = \lim_{x \to 0^+} g(x)$$

Pour tout $x > 0$: $\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) = 2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$, où $\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$
et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées,
donc $\lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty$.
Par composition avec $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, on conclut que :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0, h(x) = \ln(x) + 2x - 1$.
   a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont, avec :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

   Il est donc clair que pour tout $x > 0, h'(x) > 0$ et donc que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) On rajoute les calculs de limites : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} 2x-1$
   donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$,
   et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$
   et $\lim_{x\to0^+} 2x-1 = -1$
   donc $\lim_{x\to0^+} h(x) = -\infty$.
   La fonction h est donc continue (car dérivable), strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'intervalle-image $]-\infty; +\infty[$ qui contient 0 : d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Comme par ailleurs :
   $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2\times\frac{1}{2} - 1 = -\ln(2) < 0$ et $h(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 1 > 0$,
   alors :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) = 0 < h(1) \iff \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

   par stricte croissance de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont.
   On reconnaît une forme e^u qui a pour dérivée $u' \cdot e^u$, donc :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{\ln(x)+2x-1}{x^2}\cdot g(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x).$$

   d) Pour tout $x > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ et $g(x) > 0$ puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\| +\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

1. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et $u_n > 0$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. L'énoncé définit $u_0 > 0$ (sans donner sa valeur), donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Puisque (H.R.) $u_n > 0$, alors $u_n \in \mathcal{D}_g$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini.

Comme on l'a vu par ailleurs : $\forall x>0, g(x)>0$ (c'est une exponentielle), donc $u_{n+1}=g\left(u_n\right)>0$

Conclusion. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

2.
3. a) On demande ici le signe d'un produit :
on sait que $\ln(x)>0 \Longleftrightarrow x>1 \Longleftrightarrow x-1>0$,
donc $(x-1)$ et $\ln(x)$ sont deux facteurs toujours de même signe sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$, ce qui garantit que :
$\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \quad (x-1)\ln(x) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x=1$
b) Pour tout $x>0$:

$$\frac{g(x)}{x}=\frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{e^{\ln(x)}}=\exp\left(2\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}-\ln(x)\right)=\exp\left(\ln(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=\exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)$$

On a vu que : $\forall x>0,(x-1)\ln(x) \geqslant 0$, donc $\frac{(x-1)\ln(x)}{x} \geqslant 0$; ce qui implique : $\exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right) \geqslant e^0 \Longleftrightarrow \frac{g(x)}{x} \geqslant 1$, par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.
c) Pour tout $x>0, \frac{g(x)}{x} \geqslant 1 \Longleftrightarrow g(x) \geqslant x$, et l'égalité $g(x)=x \Longleftrightarrow \frac{g(x)}{x}=1$ est vraie si et seulement si $\frac{(x-1)\ln(x)}{x}=0 \Longleftrightarrow (x-1)\ln(x)=0 \Longleftrightarrow x=1$ d'après la question précédente.
On sait d'après 1 . que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n>0$ donc d'après 3.c) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g\left(u_n\right) \geqslant u_n \Longleftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n,$$

puisqu'on a pu remplacer x par u_n. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
4. Dans cette question, on supposait que $u_0>1$.
a) On démontre encore par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $u_n>1$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
I. L'énoncé suppose $u_0>1$, donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.
H. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :
On a supposé (H.R.) que $u_n>1$; or g est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$, donc sur $[1;+\infty[$ puisque $\alpha<1$.
Ainsi donc : $\quad g\left(u_n\right)>g(1) \Longleftrightarrow u_{n+1}>e^{(2-1)\ln(1)}=e^0=1$
C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.
b) La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours croissante (cette propriété ne dépend pas de la valeur de u_0).
Si elle était majorée, elle convergerait vers un réel ℓ qui doit vérifier $g(\ell)=\ell$. Or on a vu que seul $\ell=1$ convient, ce qui est une limite impossible pour une suite croissante qui commence à $u_0>1$.
La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et non majorée : d'après le théorème de limite montone, elle diverge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

5. Dans cette question uniquement, on supposait $u_0 \in\left[\frac{1}{2};1\right]$.
a) On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
I. L'hypothèse faite dans cette question assure que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
H. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On a supposé (H.R.) que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$: d'après 3.c), on a alors $g(u_n) \geqslant u_n \geqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow u_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$.
Par ailleurs, puisque $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, alors par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$2 \geqslant \frac{1}{u_n} \geqslant 1 \Longrightarrow 2 - \frac{1}{u_n} \geqslant 0,$$

tandis que par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(1) \Longrightarrow \ln(u_n) \leqslant 0$.
Ainsi, $\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n) \leqslant 0 \Longrightarrow \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) \leqslant 1 \Longrightarrow u_{n+1} = g(u_n) \leqslant 1$,
donc $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$
C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.
b) On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et on vient de démontrer qu'elle est majorée par 1 , donc elle converge d'après le théorème de limite monotone, vers une limite $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
On a alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, et comme g est continue sur $\mathbb{R}_+^*, \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$, donc par unicité de la limite : $g(\ell) = \ell$. Or on a vu que $x = 1$ est la seule solution de l'équation $g(x) = 1$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$