DS 7

Correction

*La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la clarté et la **précision** des raisonnements entreront pour une part important dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats.*

• Exercice 1 - Espaces vectoriels *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On considère les vecteurs

$$u = (0,-1,3) \qquad u_1 = (1,0,1) \qquad u_2 = (1,-1,2) \qquad u_3 = (2,1,-1)$$

ainsi que,

$$e_1 = (1,0,0) \qquad e_2 = (0,1,0) \qquad e_3 = (0,0,1)$$

(a) Montrer que u est une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3.

On cherche trois réels a, b et c tels que $u = au_1 + bu_2 + cu_3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$u = au_1 + bu_2 + cu_3 \iff \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ \quad - b + c = -1 \\ a + 2b - c = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ \quad - b + c = -1 \\ \quad b - 3c = 3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\iff \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ \quad - b + c = -1 \\ \quad - 2c = 2 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Donc, finalement,

$$u = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - u_3$$

et donc $\boxed{u \text{ est bien une combinaison linéaire des vecteurs } u_1,\ u_2 \text{ et } u_3.}$

(b) Montrer que u est une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3.

Dans cette question, on peut remarquer directement que

$$u = 0 \cdot e_1 - \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$$

et donc, $\boxed{u \text{ est bien une combinaison linéaire des vecteurs } e_1,\ e_2 \text{ et } e_3.}$

(c) Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_3.

Supposons par l'absurde que u est une combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_3. Alors, il existe deux réels a et b tels que $u = ae_1 + be_3$. Donc, les réels a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} a = 0 \\ 0 = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

C'est donc absurde. Ainsi, $\boxed{u \text{ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs } e_1 \text{ et } e_3.}$

2. On considère les ensembles F et G donnés pas

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

i. F est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$.

ii. L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ appartient à F car $2 \times 0 - 0 - 3 \times 0 = 0$.

iii. Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_3)$ deux vecteurs de F, c'est-à-dire vérifiant

$$2x_1 - y_1 - 3z_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x_2 - y_2 - 3z_2 = 0$$

et a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au+bv$ est dans F. Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au+bv$ est donné par

$$au+bv = a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2) = (ax_1+bx_2, ay_1+by_2, az_1+bz_2) = (X,Y,Z).$$

Montrons que $au+bv \in F$, c'est-à-dire que

$$2X - Y - 3Z = 0$$

En utilisant le fait que u et v sont dans F, on obtient que

$$\begin{aligned} 2X - Y - 3Z &= 2(ax_1 + bx_2 + cz_2) - (ay_1 + by_2) - 3(az_1 + bz_2) \\ &= a(2x_1 - y_1 - 3z_1) + b(2x_2 - y_2 - 3z_2) \\ &= a \times 0 + b \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $au+bv \in F$.

Finalement, $\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

(b) Montrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ n'appartient pas à G car $0 \times 0 \neq 1$.

Donc $\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$

(c) Donner un élément non nul de F.

Le vecteur $\boxed{(1,2,0) \text{ appartient à F}}$ (et n'est pas le vecteur nul) car

$$2 \times 1 - 2 - 3 \times 0 = 0.$$

(d) Donner un élément de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à F.

Le vecteur $\boxed{(1,1,1) \text{ n'appartient pas à F}}$ car

$$2 \times 1 - 1 - 3 \times 1 = -2 \neq 0$$

3. On considère les vecteurs suivants,

$$u=(1,2,3) \qquad v=(-1,0,2) \qquad w=(0,1,2) \qquad t=(3,2,-1)$$

(a) Montrer que la famille (u,v,w) est libre.

Montrons que la famille (u,v,w) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0\\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\ 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0\\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & 5\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{array}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0\\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & & - & \frac{1}{2}\lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\frac{5}{2}L_2\end{array}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est libre.}}$

(b) Montrer que la famille (u,v,t) n'est pas libre.

On peut par exemple remarquer que

$$u=2v+t$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u,v,t) \text{ n'est pas libre.}}$

4. On considère les vecteurs

$$u=(-1,2,0) \qquad v=(3,-5,-1) \qquad w=(0,1,-2)$$

Montrer que la famille (u,v,w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Tout d'abord, les trois vecteurs u,v et w sont bien dans $\mathbb{R}^3$. Soit $e=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe x,y et z trois réels tels que $e=xu+yv+zw$. Soient $x,y,x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
e=au+bv+cw &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & & & = & a\\ 2x & - & 5y & + & z & = & b\\ & - & y & - & 2z & = & c\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & & & = & a\\ & & y & + & z & = & b+2a\\ & - & y & - & 2z & = & c\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ \\ \end{array}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 3y & & & = & a\\ & & y & + & z & = & b+2a\\ & & & - & z & = & 2a+b+c\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3\leftarrow L_3+L_2\end{array}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 11a+6b+3c\\ y & = & 4a+2b+c\\ z & = & -2a-b-c\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall e=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \exists (x,y,z)=(11a+6b+3c,4a+2b+c,-2a-b-c), \qquad e=xu+yv+zxw$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

5. Trouver une base de chacun des espaces suivants,

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,1),(3,-2,3))$$

Déterminons une base du sev $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\}$.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de F grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 3z = 0 \qquad \text{(Étape 2)}$$

  On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici x et z.

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 3z \qquad \text{(Étape 3)}$$

  Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad u = (x, 2x-3z, z) && \text{(Étape 4)} \\ &\Leftrightarrow \quad u = x(1,2,0) + z(0,-3,1) && \text{(Étape 5)} \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,-3,1)) && \text{(Étape 6)} \end{aligned}$$

  Donc, la famille

$$(u_1,u_2) = ((1,2,0),(0,-3,1))$$

  est génératrice de F.
- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille $(u_1,u_2) = ((1,2,0),(0,-3,1))$ est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

  Donc, la famille (u_1,u_2) est une famille libre.
- Finalement, $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) = ((1,2,0),(0,-3,1)) \text{ est une base de } F.}$

Trouvons une base du sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,1),(3,-2,3))$.

- La famille $((1,0,1),(1,1,1),(3,-2,3))$ engendre G. Cependant, ce n'est pas une famille libre (et donc pas une base) car, on peut remarquer par exemple que

$$(3,-2,3) = 5 \cdot (1,0,1) - 2(1,1,1)$$

  Ceci montre aussi que la famille $((1,0,1),(1,1,1))$ engendre G.
- Montrons que la famille $((1,0,1),(1,1,1))$ est libre. Notons $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (1,1,1)$. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

  Donc, la famille (u_1,u_2) est une famille libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) = ((1,0,1),(1,1,1)) \text{ est une base de } G.}$

• Exercice 2 - Espaces vectoriels

On considère l'ensemble

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+2z-2t=0\}.$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.

   L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$u\in F \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0\\ x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0\end{array}\right.$$

   On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction de deux inconnues restantes - z et t, grâce à la **méthode du pivot de Gauss**.

$$\begin{aligned} u\in F \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0\\ & - & 2y & + & z & - & 3t & = & 0\end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2-L_1\\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0\\ & & y & & & & & = & \frac{1}{2}z-\frac{3}{2}t\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}t\\ y & = & \frac{1}{2}z-\frac{3}{2}t\end{array}\right.\end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u\in F \quad &\Leftrightarrow \quad u=(-\tfrac{3}{2}z+\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}z-\tfrac{3}{2}t, z, t)\\ &\Leftrightarrow \quad u = z(-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},1,0)+t(\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},0,1)\\ &\Leftrightarrow \quad u\in \mathrm{Vect}((-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},1,0),(\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},0,1))\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$F=\mathrm{Vect}((-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0,1)) = \mathrm{Vect}((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$$

   - On obtient donc directement que la famille $((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$ est une famille génératrice de F.
   - De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car s'il existe un réel λ tel que

$$(-3,1,2,0)=\lambda(1,-3,0,2)$$

     alors, en regardant la dernière coordonnée, on obtient $\lambda=0$ ce qui ne va pas avec les autres coordoonées. Donc la famille $((-1,0,1,0),(0,-1,0,1))$ est libre.

   Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((-3,1,2,0),(1,-3,0,2)) \text{ est une base de } F.}$

2. En déduire la dimension de F.

   D'après la Question 1, la famille $((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$ est une base de F. Or cette base contient deux vecteurs. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension 2.}}$

3. On considère la famille $\mathscr{B}=((0,-4,1,3),(3,-1,-2,0))$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre.

   Les deux vecteurs $(0,-4,1,3)$ et $(3,-1,-2,0)$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel λ tel que

$$(0,-4,1,3)=\lambda(3,-1,-2,0)$$

   alors en regardant la première coordonnée, on obtient $\lambda=0$ alors qu'en regardant la deuxième, on obtient $\lambda=4$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} \text{ est libre.}}$

(b) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de F.

- Tout d'abord, le vecteur $(0,-4,1,3)$ est bien **dans** F car

$$0-4+1+3=0 \quad \text{et} \quad 0-(-4)+2\times 1-2\times 3=0$$

  De même, le vecteur $(3,-1,-2,0)$ est bien dans F.
- De plus, d'après la Question 3(a), la famille $\mathscr{B}$ est **libre**.
- Enfin, la famille contient deux vecteurs, c'est-à-dire **autant que la dimension** de F d'après la Question 2.

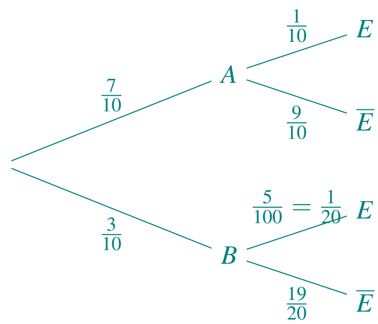
Donc, la famille $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } F.}$

• Exercice 3 - Probabilités

•• Première expérience (univers fini)

Une personne envoie **un** courrier électronique par l'intermédiaire au hasard soit du serveur A, soit du serveur B. La probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A est de $7/10$. De plus, la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $1/10$ alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de $5/100$. On note A l'évènement "Le message est envoyé avec le serveur A", B l'évènement "Le message est envoyé avec le serveur B" et E l'évènement "Le message est envoyé avec une erreur".

Cette situation peut être représentée par l'arbre de probabilité suivant :



1. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur B ?

   On cherche $P(B)$. Or B est l'évènement **contraire** de A donc,

$$\boxed{P(B)} = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{10} \boxed{= \frac{3}{10}}$$

2. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A et qu'il contienne une erreur ?

   On cherche $P(A \cap E)$. D'après la formule des **probabilités composées** (ou la définition d'une probabilité conditionnelle), on a,

$$\boxed{P(A \cap E)} = P(A) \times P_A(E) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} \boxed{= \frac{7}{100}}$$

3. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec une erreur ?

   On cherche $P(E)$. Comme (A,B) forme un système complet d'évènements, d'après la formule des **probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}\boxed{P(E)} &= P(A) \times P_A(E) + P(B) \times P_B(E) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{20} \\ &\boxed{= \frac{17}{200}}\end{aligned}$$

4. Quelle est la probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A ou qu'il contienne une erreur ?

   On cherche $P(A \cup E)$. D'après la formule du **crible**, on a,

$$\boxed{P(A \cup E)} = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{7}{10} + \frac{17}{200} - \frac{7}{100} \boxed{= \frac{143}{200}}$$

   en utilisant les résultats des Questions 2 et 3.

5. Quelle est la probabilité que le message ait été envoyé avec le serveur A sachant qu'il contient une erreur ?

   On cherche $P_E(A)$. D'après la formule de **Bayes**, on a

$$\boxed{P_E(A)} = \frac{P(A) \times P_A(E)}{P(E)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{17}{200}} \boxed{= \frac{14}{17}}$$

•• Deuxième expérience (univers infini)

Cette fois-ci, une personne envoie **une infinité** de courrier électronique. Les choix des serveurs sont indépendants les uns des autres. La probabilité que le message soit envoyé avec le serveur A est toujours de $7/10$. De plus, pour chaque message, la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est encore de $1/10$ alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de $5/100$.

Pour chaque message envoyé, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3,4 et 5, il a choisi le serveur B, le jour 6, le serveur A et ainsi de suite. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. Pour la suite BBAAAB, on a également une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. Pour la suite BBBBAAB, on a une première série de longueur 4 et une deuxième série de longueur 2.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "Le serveur A est choisi le k-ième jour".
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'évènement "Le serveur B est choisi le k-ième jour".
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n l'évènement "La première série est de longueur n". Par exemple, L_4 est réalisé si pendant les 4 premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le 5 jour, c'est l'autre serveur qui a été choisi.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n l'évènement "La deuxième série est de longueur n".

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $P(A_k)$?

   Pour chaque message, le serveur A est choisi avec une probabilité de 7/10. Donc,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(A_k) = \tfrac{7}{10}}$$

2. Justifier que

$$L_3 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4)$$

   Avoir une choix de longueur 3 revient, soit à choisir les trois premiers jours le serveur A et le quatrième jour le serveur B ou à choisir les trois premiers jours le serveur B et le quatrième jour le serveur A. En termes ensemblistes, le "et" se traduisant par une intersection et le "ou" par une union, on obtient,

$$\boxed{L_3 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4)}$$

3. En déduire que

$$P(L_3) = \frac{609}{5000}$$

   D'après la Question 2, on a

$$P(L_3) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4)\right).$$

   Or, les évènements $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4$ et $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4)$ sont **incompatibles**. Donc, on obtient,

$$P(L_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap A_4).$$

   Puis, les évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont **mutuellement indépendants**. Donc, on obtient,

$$P(L_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times P(B_4) + P(B_1) \times P(B_2) \times P(B_3) \times P(A_4).$$

   Or, en utilisant le résultat de la Question 1,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(A_k) = \frac{7}{10} \quad \text{et} \quad P(B_k) = 1 - P(A_k) = \frac{3}{10}.$$

   Donc, finalement, on obtient que

$$P(L_3) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{P(L_3)} = \left(\frac{7}{10}\right)^3 \times \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \frac{7}{10} \boxed{= \frac{609}{5000}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire l'évènement L_n à l'aide de certains des évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En raisonnant comme à la Question 2, on a,

$$\boxed{L_n = (A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_1 \cap \cdots B_n \cap A_{n+1})}$$

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(L_n)$.

   D'après la Question 4, on a,

$$P(L_n) = P\left((A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_1 \cap \cdots B_n \cap A_{n+1})\right)$$

   Puis, en utilisant comme à la Question 3, le fait que les évènements $A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B_{n+1}$ et $B_1 \cap \cdots B_n \cap A_{n+1}$ sont **incompatibles** et le fait que les évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont **mutuellement indépendants**, on obtient que

$$\begin{aligned}\boxed{P(L_n)} &= P(A_1)\times\cdots\times P(A_n)\times P(B_{n+1}) + P(B_1)\times\cdots\times P(B_n)\times P(A_{n+1})\\ &= \frac{7}{10}\times\cdots\times\frac{7}{10}\times\frac{3}{10} + \frac{3}{10}\times\cdots\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\\ &\boxed{= \left(\tfrac{3}{10}\right)^n \times \tfrac{7}{10} + \left(\tfrac{7}{10}\right)^n \times \tfrac{3}{10}}\end{aligned}$$

6. Vérifier par le calcul que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_n) = 1$$

   en justifiant au préalable l'existence de cette somme.

   D'après la Question 5,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(L_n) = \left(\frac{3}{10}\right)^n \times \frac{7}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^n \times \frac{3}{10}$$

   Or,

   - la série $\sum \left(\frac{3}{10}\right)^n$ est une **série géométrique** (tronquée) de paramètre $3/10 \in]-1,1[$ donc elle converge
   - De même, la série $\sum \left(\frac{7}{10}\right)^n$ est une **série géométrique** (tronquée) de paramètre $7/10 \in]-1,1[$ donc elle converge.

   Donc, par combinaison linéaire, la série $\sum P(L_n)$ converge et sa somme est donnée par,

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_n)} &= \frac{7}{10}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n + \frac{3}{10}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^n\\ &= \frac{7}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{1-\frac{3}{10}} + \frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{1}{1-\frac{7}{10}}\\ &= \frac{3}{10}+\frac{7}{10}\\ &\boxed{=1}\end{aligned}$$

7. Justifier que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(L_n)$$

   converge et calculer sa somme. *Cette valeur peut s'interpréter comme la longueur moyenne de la première série de serveurs.*

En utilisant le résultat de la Question 5, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \times P(L_n) = n\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \times \frac{21}{100} + n\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \times \frac{21}{100}$$

Or,

- la série $\sum n\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ est une **série géométrique dérivée d'ordre 1** de paramètre $3/10 \in]-1,1[$ donc elle converge
- De même, la série $\sum n\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$ est une **série géométrique dérivée d'ordre 1** de paramètre $7/10 \in]-1,1[$ donc elle converge.

Donc, par combinaison linéaire, la série $\sum nP(L_n)$ converge et sa somme est donnée par,

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nP(L_n)} &= \frac{21}{100}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{21}{100}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} \\ &= \frac{21}{100} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{10})^2} + \frac{21}{100} \times \frac{1}{(1-\frac{7}{10})^2} \\ &= \frac{3}{7} + \frac{7}{3} \\ &\boxed{= \frac{58}{21}}\end{aligned}$$

La longueur moyenne de la première série de serveurs se situe entre deux et trois.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixe. Dans cette question, on cherche à calculer $P(M_n)$.
   (a) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_k \cap M_n)$.

   Soient n, k deux entiers naturels non nuls. On a,

$$\begin{aligned}L_k \cap M_n = (A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{k+n} \cap A_{k+n+1}) \\ \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_{k+n} \cap B_{k+n+1})\end{aligned}$$

   Donc, en raisonnant comme à la Question 5, on a,

$$\boxed{P(L_k \cap M_n) = \left(\frac{3}{10}\right)^{k+1} \times \left(\frac{7}{10}\right)^n + \left(\frac{7}{10}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n}$$

   (b) En déduire, à l'aide d'une formule que l'on nommera, la valeur de $P(M_n)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $(L_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements, en utilisant la **formule des probabilités totales**, on sait que la série $\sum_k P(L_k \cap M_n)$ converge et

$$P(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_k \cap M_n)$$

   Donc, en utilisant le résultat de la Question 8(a), on obtient,

$$P(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1} \times \left(\frac{7}{10}\right)^n + \left(\frac{7}{10}\right)^{k+1} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n\right)$$

   Or, les deux séries $\sum(3/10)^{k+1}$ et $\sum(7/10)^{k+1}$ convergent donc, on peut "casser la somme en deux" pour avoir,

$$\begin{aligned}\boxed{P(M_n)} &= \left(\frac{7}{10}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1} + \left(\frac{3}{10}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^{k+1} \\ &= \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^k + \frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^n \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{10}\right)^k \\ &= \frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{10}\right)^n \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{1-\frac{3}{10}} + \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^n \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{1-\frac{7}{10}} \\ &\boxed{= \left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

• Exercice 4 - Probabilités (Ecricome 2023)

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernable au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette second urne. On note, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

- X_k l'évènement "La première boule porte le numéro k"
- Y_k l'évènement "La deuxième boule porte le numéro k".

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Donner, pout tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X_k)$.

   Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Le tirage dans la première urne est **uniforme**. Il y a une seule boule de numéro k parmi n boules au total. On a donc

   $$\boxed{P(X_k) = \frac{1}{n}}$$

2. Calculer la somme suivante

   $$\sum_{k=1}^{n} k \times P(X_k)$$

   D'après la Question 1, on a,

   $$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad P(X_k) = \frac{1}{n}.$$

   Donc,

   $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k \times P(X_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \boxed{= \frac{n+1}{2}}$$

3. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

   (a) On suppose que l'évènement X_k est réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

   Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Si l'évènement X_k est réalisé, dans la second urne, on a mis une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Donc, le nombre total de boules dans la seconde urne dans ce cas est,

   $$\underbrace{1}_{\text{1 boule num 1}} + \underbrace{2}_{\text{2 boule num 2}} + \underbrace{3}_{\text{3 boule num 3}} + \cdots + \underbrace{k}_{\text{k boule num k}} = \sum_{i=1}^{k} i = \boxed{\frac{k(k+1)}{2}}$$

   (b) Pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$, exprimer $P_{X_k}(Y_j)$ en fonction de k et j. *On distinguera les cas $j \leqslant k$ ou $j \geqslant k+1$.*

   Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Si l'évènement X_k est réalisé, dans la seconde urne, il n'y a que des boules dont le numéro est compris entre 1 et k. Donc,

   $$\boxed{\forall j \in \{1, \dots, n\},\ j \geqslant k+1, \qquad P_{X_k}(Y_j) = 0}$$

   Sinon, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \leqslant k$, il y a j boules numérotées j dans la seconde urne, parmi $\frac{k(k+1)}{2}$ boules au total d'après la Question 3(a). Comme le tirage est **uniforme**, on obtient finalement que

   $$\boxed{\forall j \in \{1, \dots, n\},\ j \leqslant k, \qquad P_{X_k}(Y_j) = \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)}}$$

4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$
Donc, par identification des coefficients de même degrés au numérateur, on en déduit que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & & & = & 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -1 \end{array} \right.$$
Donc, finalement, on obtient que
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$$

(b) En déduire que, pour tout entier $j \in \{1, \ldots, n\}$,
$$P(Y_j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$
Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. La famille $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ forme un système complet d'évènements. Donc, en utilisant la formule des **probabilités totales**, on obtient
$$P(Y_j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_k) P_{X_k}(Y_j)$$
Donc, en utilisant les résultats des Questions 1 et 3(b), on obtient
$$P(Y_j) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
Puis, en utilisant le résultat de la Question 4(a), on a, en remarquant un **télescopage**,
$$\boxed{P(Y_j)} = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) \boxed{= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}}$$

5. Montrer que
$$\sum_{j=1}^{n} j \times P(Y_j) = \frac{n+2}{3}$$
En utilisant le résultat de la Question 4(b), on a,
$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{j=1}^{n} j \times P(Y_j)} &= \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j(n+1-j) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1) \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= (n+1) - \frac{2n+1}{3} \\ &= \frac{3(n+1)-(2n+1)}{3} \\ &\boxed{= \frac{n+2}{3}} \end{aligned}$$

• Exercice 5 - Primitives

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\ln(x) \end{array}$$

1. Justifier que f admet une primitive sur $]0,+\infty[$.

   La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynomiale) donc a fortiori sur $]0,+\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ (fonction usuelle). Donc, par multiplication, la fonction f est **continue** sur $]0,+\infty[$ donc elle admet une primitive sur $]0,+\infty[$.

2. Combien de primitives la fonction f admet-elle sur $]0,+\infty[$?

   La fonction étant **continue** sur $]0,+\infty[$, la fonction y admet une infinité de primitives.

3. On considère la fonction

$$F : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3(3\ln(x)-1)}{9} \end{array}$$

   Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

   Par opérations sur les fonctions usuelles, la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) &= \frac{1}{9}\left(3\times 3x^2\ln(x) + 3x^3 \times \frac{1}{x} - 3x^2\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(9x^2\ln(x) + 3x^2 - 3x^2\right) \\ &= \frac{1}{9}9x^2\ln(x) \\ &= x^2\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Donc F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

4. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0,+\infty[$.

   Comme F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$ (cf Question 3), l'ensemble des primitives de f sur $]0,+\infty[$ est donné par

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

   Autrement dit, une primitive de f sur $]0,+\infty[$ est de la forme

$$\boxed{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3(3\ln(x)-1)}{9} + c \end{array} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}}$$

5. Déterminer la primitive G de f sur $]0,+\infty[$ qui vérifie $G(1) = 0$.

   Soit G la fonction définie par

$$\boxed{G : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3(3\ln(x)-1)}{9} + \frac{1}{9} \end{array}}$$

   D'après la Question 4, G est une primitive de f sur $]0,+\infty[$. De plus, elle vérifie $G(1) = 0$. Or, il existe une unique primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui vaut 0 en 1. Ainsi, par unicité, la fonction G donnée est donc la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui vérifie $G(1) = 0$.

• Exercice 6 - Primitives

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles considérés.

a) $x \mapsto x^5 + 2$ sur $\mathbb{R}$

b) $x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$

c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-3x}$ sur $]0, +\infty[$

d) $x \mapsto 2(x+1)\exp(x^2 + 2x)$ sur $\mathbb{R}$

e) $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

f) $x \mapsto (1-7x)^4$ sur $\mathbb{R}$

g) $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

h) $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$

a) $\boxed{x \mapsto \frac{x^6}{6} + 2x}$ sur $\mathbb{R}$

b) $\boxed{x \mapsto 2\ln(x) - \frac{3}{2x^2}}$ sur $]0, +\infty[$

c) $\boxed{x \mapsto 2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}}$ sur $]0, +\infty[$

d) $\boxed{x \mapsto \exp(x^2 + 2x)}$ sur $\mathbb{R}$

e) $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\ln(-2x-1)}$ sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

f) $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{35}(1-7x)^5}$ sur $\mathbb{R}$

g) $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{2(x^2+1)}}$ sur $\mathbb{R}$

h) $\boxed{x \mapsto x + \ln(x-1)}$ sur $]1, +\infty[$

• Exercice 7 - Primitives

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{5x^2+21x+22}{x^3+5x^2+3x-9} \end{array}$$

1. Montrer que -3 est une racine du polynôme $P : x \mapsto x^3+5x^2+3x-9$.

   On a
   $$P(-3) = (-3)^3 + 5\times(-3)^2 + 3\times(-3) - 9 = -27+45-9-9 = 0$$
   Donc $\boxed{-3 \text{ est bien une racine de } P.}$

2. Déterminer trois réels α, β et γ tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+3)(\alpha x^2+\beta x+\gamma).$$
   Soient α, β et γ des réels à déterminer. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{aligned}(x+3)(\alpha x^2+\beta x+\gamma) &= \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+3\alpha x^2+3\beta x+3\gamma \\ &= \alpha x^3+(3\alpha+\beta)x^2+(3\beta+\gamma)+3\gamma\end{aligned}$$
   Donc, par identification des coefficients de même degrés au numérateur, on en déduit que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+3)(\alpha x^2+\beta x+\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & & & & & = & 1 \\ 3\alpha & + & \beta & & & = & 5 \\ & & 3\beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & & & 3\gamma & = & -9 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 2 \\ \gamma & = & -3 \end{array}\right.$$
   Finalement, on obtient que
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+3)(x^2+2x-3)}$$

3. En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)(x+3)^2.$$
   D'après la Question 2,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x+3)(x^2+2x-3)$$
   Or le polynôme $x \mapsto x^2+2x-3$ est un polynôme de degré deux dont le discriminant vaut $\Delta = 16 > 0$ et qui admet donc deux racines réelles données par -3 et 1. Donc,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2+2x-3 = 1\times(x+3)(x-1).$$
   Et finalement,
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)(x+3)^2}$$

4. Déterminer trois réels a, b et c tels que
   $$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$
   En utilisant la Question 3, on a
   $$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$$

Or, en même les fractions au même dénominateur et en regroupant les termes, on a

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x+3)^2}=\frac{(a+b)x^2+(6a+2b+c)x+(9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}$$

Donc, par identification, les deux quantités précédentes sont égales sur $]1,+\infty[$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 5 \\ 6a & + & 2b & + & c & = & 21 \\ 9a & - & 3b & - & c & = & 22 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 5 \\ & - & 4b & + & c & = & -9 \\ & - & 12b & - & c & = & -23 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2-6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-9L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 5 \\ & - & 4b & + & c & = & -9 \\ & & & - & 4c & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 3 \\ b & = & 2 \\ c & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, on obtient que

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}}$$

5. En déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$.

D'après la Question 4, on a

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}$$

Donc une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est donné par

$$x \mapsto 3\ln(|x-1|)+2\ln(|x+3|)+\frac{1}{x+3}$$

Or, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $x-1 \geqslant 0$ et $x+3 \geqslant 0$. Ainsi, une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est donné par

$$\boxed{x \mapsto 3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}}$$

6. Déterminer la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

En utilisant le résultat de la Question 5, on sait que toutes les primitives de f sur $]1,+\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto 3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}+c,$$

avec c une constante. De plus, si on choisit $c=-2\ln(5)-\frac{1}{5}$, alors la fonction s'annule en 2. Donc, la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est

$$\boxed{x \mapsto 3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}-2\ln(5)-\frac{1}{5}}$$