DS 5

Vendredi 3 avril, de 13h30 à 16h30

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

Exercice 1 – On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(a + 2b, a + 4b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Dans cette question, on s'intéresse à l'ensemble F.
   (a) Sans écrire F comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille, démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner un vecteur qui appartient à F et un vecteur qui n'appartient pas à F.
   (c) Écrire une fonction `Python`, qui prend en argument trois nombres réels x, y et z, et qui renvoie le message "Le triplet appartient à F" si le triplet (x, y, z) appartient à l'ensemble F et qui renvoie le message "Le triplet n'appartient pas à F" dans le cas contraire.
   (d) Déterminer deux vecteurs u_1 et u_2 appartenant à $\mathbb{R}^3$ tels que
   $$F = \text{Vect}(u_1, u_2)$$
   (e) En déduire une famille génératrice de F.
   (f) La famille (u_1, u_2) est-elle libre ?
   (g) En déduire une base de F.
2. Dans cette question, on s'intéresse à l'ensemble G.
   (a) Donner un vecteur qui appartient à G.
   (b) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Trouver une base de G.
   (d) En partant de la définition initiale de G,montrer que:
   $$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - 2z = 0\}$$
3. Trouver une base de $F \cap G$

Exercice 2 – Soit h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1 + e^{-x}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Étudier la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = h(x) - x$ et montrer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
2. En déduire que l'équation : $h(x) = x$ admet une unique solution a appartenant à $[1;+\infty[$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1;+\infty[$
4. Montrer que : $\forall x \geqslant 1, \left|h'(x)\right| \leqslant e^{-1}$.
5. Déduire des 2 questions précédentes que : $\forall x \geqslant 1, |h(x) - a| \leqslant e^{-1}|x - a|$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}|u_n - a|$.
7. Montrer que : $a - 1 < e^{-1}$.
8. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$.
9. En déduire le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$.
10. Écrire une fonction Python u d'argument n renvoyant le terme u_n de la suite (u_n).

Exercice 3 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer, dans l'ordre, que :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Donner l'expression de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$. (Aide: De la même manière que pour l'expression de f)
4. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5. f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
6. Recopier et compléter le programme suivant qui permet de tracer à l'aide de `Python` la courbe de la fonction g sur $[0, 10]$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def g(x) :
    return ( .... )

abscisses = np.linspace( .... , .... , .... )
ordonnees =  ....
plt.plot(abscisses,ordonnees)
plt.show()
```

Exercice 4 – Étudier la nature des séries suivantes et donner leur somme en cas de convergence.

1. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k!}$
2. $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{4^{k-1}}$
3. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \times 3^k + 1}{5^k}$

Exercice 5 – On considère un dé truqué tétraédrique (à 4 faces), dont les faces sont numérotées de 1 à 4 . On suppose que la probabilité de faire 4 vaut $\frac{1}{2}$, et que les probabilités de faire 1,2 ou 3 sont identiques. On jette ce dé, et on note X le résultat apparaissant.

1. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.
2. Montrer que l'espérance de X vaut 3 .
3. (a) Calculer la variance de X.
   (b) Rappeler la variance d'un loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$, et la comparer à la variance de X.

   Soit $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule de l'urne. On suppose que chaque tirage est équiprobable.
4. Dans cette question, on effectue 3 tirages successifs, et on note Y le nombre de fois où la boule numéro 1 a été piochée.
   (a) Nommer la loi suivie par Y, en précisant ses paramètres en fonction de n.
   (b) Exprimer en fonction de n l'espérance, et la variance de Y.
   (c) Préciser la probabilité d'obtenir exactement une fois la boule numéro 1.
5. Dans cette question, on jette le dé truqué. Son résultat X étant connu, on effectue X tirages successifs, et on note Z le nombre de fois où la boule numéro 1 a été piochée.
   (a) Préciser le support (l'univers-image) de Z.
   (b) Que dire des événements $[X=i]$ pour $i \in [\![1,4]\!]$?
   (c) En déduire que : $\forall k \in Z(\Omega), \mathbf{P}(Z=k) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\binom{i}{k}p^k q^{i-k} + \frac{1}{2}\binom{4}{k}p^k q^{4-k}$ où p, q sont des réels à exprimer en fonction de n. On rappelle que le coefficient binomial $\binom{i}{k}$ est nul dès que $k > i$.
   (d) Comment expliquer simplement, lorsque p, q sont des réels positifs de somme 1 , que :
   $$\sum_{k=0}^{i} k\binom{i}{k}p^k q^{i-k} = ip \quad ?$$
   (e) En déduire l'espérance de Z, et la comparer à celle de Y.
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant permettant de simuler la variable aléatoire X:

```
import numpy.random as rd
def X() :
    r = rd.random()
    if r < 1/6 : return 1
    elif r < 1/3 : return 2
    elif ...: return...
    else: return...
```