

DS 5

Correction

Exercice 1 – 1. (a) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- $F \subset \mathbb{R}^3$
- $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $0 - 2 \times 0 + 0 = 0$
- Soient $u = (x, y, z) \in F$, $v = (x', y', z') \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$au + bv = (\underbrace{ax + bx'}_X, \underbrace{ay + by'}_Y, \underbrace{az + bz'}_Z)$$

$$\begin{aligned} X - 2Y + Z &= ax + bx' - 2ay - 2by' + az + bz' \\ &= a(\underbrace{x - 2y + z}_{=0 \text{ car } u \in F}) + b(\underbrace{x' - 2y' + z'}_{=0 \text{ car } v \in F}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $au + bv \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

(b) Le vecteur $(1, 2, 3) \in F$ car

$$1 - 2 \times 2 + 3 = 0$$

Le vecteur $(1, 1, 1) \notin F$ car

$$1 - 2 \times 1 + 1 \neq 0$$

(c)

```
1 def appartenanceaF(x, y, z):
2     if x - 2*y + z == 0 :
3         return("Le triplet appartient à F")
4     else :
5         return("Le triplet n'appartient pas à F")
```

(d) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} u \in F &\Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y - z \\ &\Leftrightarrow u = (2y - z, y, z) + \\ &\Leftrightarrow u = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((2, 1, 0)(-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc,

$$F = \text{Vect}((2, 1, 0)(-1, 0, 1))$$

(e) En déduire une famille génératrice de F .

D'après la question précédente,

$$F = \text{Vect}((2, 1, 0)(-1, 0, 1))$$

Donc, la famille $((2, 1, 0)(-1, 0, 1))$ est génératrice de F .

- (f) la famille $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ contient deux vecteurs, qui sont non colinéaires, donc elle est libre.
- (g) La famille $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est libre et génératrice de F d'après les questions précédentes, c'est donc une base de F .
2. (a) Le vecteur $(1, 1, 1)$ appartient à G car il existe $a = 1$ et $b = 0$ tels que

$$(1, 1, 1) = (a + 2b, a + 4b, a + b).$$

- (b) Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} u \in G &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, u = (a + 2b, a + 4b, a + b) \\ &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, u = a \cdot (1, 1, 1) + b \cdot (2, 2, 0) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

avec $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (2, 2, 0)$. Donc,

$$G = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

et ainsi, G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- (c) D'après la question précédente, on sait que

$$G = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

Donc, la famille (v_1, v_2) est génératrice de G .

Comme c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, la famille (v_1, v_2) est libre et est une famille génératrice de G , c'est donc une base de G .

- (d) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, a(1, 1, 1) + b(2, 2, 0) = u \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a + 2b = x \\ a + 2b = y \\ a + b = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} b = x - z \\ b = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ a = -x + 2z \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $x - z \neq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z$, le système n'a pas de solution donc la dernière équivalence n'est pas vraie, donc la première n'est pas vraie non plus, c'est-à-dire, $u \notin F$.

- Si $x - z = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z$, alors le système admet une solution donnée par $(a, b) = (x - 2z, z)$, donc la dernière équivalence est vraie et donc la première aussi, c'est-à-dire $u \in F$.

Finalement

$$u \in F \Leftrightarrow 3x - y - 2z = 0$$

et donc,

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - 2z = 0\}$$

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a:

$$u \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

On a deux équation pour trois inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante - ici z .

$$u \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\Leftrightarrow u = (z, z, z) \\ &\Leftrightarrow u = z(1, 1, 1) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 1, 1)) \end{aligned}$$

Donc

$$F \cap G = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

La famille $((1, 1, 1))$ est génératrice et libre car composée d'un seul vecteur donc c'est une base de $F \cap G$

Exercice 2 – 1. f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} - 1$

La dérivé est donc strictement négative pour tout $x \in \mathbb{R}$

On peut alors affirmer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R}

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

De plus f est continue sur \mathbb{R}

Donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}

2. Résoudre $h(x) = x$ est équivalent à résoudre:

$$f(x) = 0$$

f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et que $0 \in \mathbb{R}$, par le théorème de la bijection, il existe une unique solution a De plus :

$$h(1) = 1 + e^{-1} > 1 \Rightarrow a \geq 1$$

Donc $a \in [1, +\infty[$

3. On a $u_0 = 1 \in [1, +\infty[$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + e^{-u_{n-1}} \geq 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

4. h est dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = -e^{-x}$$

Donc :

$$|h'(x)| = e^{-x}$$

Or $x \geq 1 \Leftrightarrow -x \leq -1 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{-1}$

Donc,

$$\forall x \geq 1 \quad |h'(x)| \leq e^{-1}$$

5. La fonction h est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $[1, +\infty[$.

D'après l'inégalité des accroissements finis : $|h(x) - h(a)| \leq k \cdot |x - a|$ où k est un majorant de $|h'(x)|$ pour $x \in [1, +\infty[$.

D'après 2, $h(a) = a$, et d'après 4, $k = e^{-1}$. Ainsi :

$$\forall x \geq 1, |h(x) - a| \leq e^{-1} |x - a|.$$

6.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, +\infty[$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| = |h(u_n) - h(a)| \leq e^{-1} |u_n - a|$$

7. On sait :

$$a = 1 + e^{-a}$$

Donc :

$$a - 1 = e^{-a} \leq e^{-1}$$

(et même strict car $a > 1$)

8. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : " |u_n - a| \leq e^{-(n+1)} "$$

Initialisation:

$$u_0 = 1$$

Donc :

$$|u_0 - a| = |1 - a| = a - 1$$

D'après la question 7 :

$$a - 1 < e^{-1}$$

Donc :

$$|u_0 - a| \leq e^{-1}$$

La propriété est vraie au rang 0

Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ donc :

$$|u_n - a| \leq e^{-(n+1)}$$

On veut montrer :

$$|u_{n+1} - a| \leq e^{-(n+2)}$$

On utilise la question 6 :

$$|u_{n+1} - a| \leq e^{-1} |u_n - a|$$

Puis on injecte l'hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - a| \leq e^{-1} \cdot e^{-(n+1)}$$

Donc :

$$|u_{n+1} - a| \leq e^{-(n+2)}$$

Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq e^{-(n+1)}$$

9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)} = 0$ donc par théorème d'encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - a| = 0$$

On obtient donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

```
10. import numpy as np
2   def u(n) :
3       u=1
4       for k in range(n):
5           u=1+np.exp(-u)
6       return(u)
```

Exercice 3 – 1. - Sur $]-\infty, 0[: x \mapsto e^x$ est continue

- Sur $]0, +\infty[: x \mapsto 1 + x$ est continue

- Problème uniquement en $x = 0$

Limite à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1$$

Limite à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + 0 = 1$$

Valeur :

$$f(0) = 1$$

Donc f continue sur \mathbb{R}

2. - Sur $]-\infty, 0[: x \mapsto e^x$ est dérivable

- Sur $]0, +\infty[: x \mapsto 1 + x$ est dérivable

Étudions en 0

- Dérivée à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- Dérivée à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x) - 1}{x} = 1$$

- Les deux sont égales donc f est dérivable sur \mathbb{R}

3.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(on peut aussi écrire plus simplement)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. Il faut vérifier que f' est continue

- Sur chaque intervalle : OK

- En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = e^0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 \quad f'(0) = 1$$

donc f' est continue en 0

$$f \in C^1(\mathbb{R})$$

5. Étudions en 0

- Dérivée à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- Dérivée à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

- Les deux ne sont pas égales donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 donc pas sur \mathbb{R}

```

6. import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 def g(x) :
5     return ( 1+x )
6
7 abscisses = np.linspace( 0 , 10 , 100 )
8 ordonnees = g(abscisses)
9 plt.plot(abscisses, ordonnees)
10 plt.show()

```

Exercice 4 – 1. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k!}$

La série converge car c'est une série exponentielle avec $x = 2$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$$

$$2. \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$$

La série Converge car c'est une série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $q = \frac{1}{4}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}$$

$$3. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \times 3^k + 1}{5^k}$$

La série converge car c'est la somme de deux série géométriques convergentes avec $q = \frac{3}{5}$ et $q = \frac{1}{5}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2 \times 3^k + 1}{5^k} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 2 \frac{1}{1-\frac{3}{5}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{25}{4}$$

Exercice 5 – 1. On sait que $\mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$

avec $\mathbf{P}(X = 4) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 3)$.

On en déduit la loi de X :

k	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$2. \text{ On calcule } \mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^4 k \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{2} \text{ donc } \mathbf{E}(X) = 3.$$

$$3. \text{ On calcule } \mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^4 k^2 \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{2} = \frac{31}{3}.$$

D'après le théorème de König-Huygens, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{31}{3} - 3^2$ donc $\mathbf{V}(X) = \frac{4}{3}$

Pour une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ (dé non truqué), on aurait $\mathbf{V} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{5}{4}$.

La variance du dé truqué est donc plus grande que celle d'un dé bien équilibré.

$$4. (a) Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{n}\right) \dots$$

$$(b) \text{ donc } \mathbf{E}(Y) = \frac{3}{n} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{3(n-1)}{n^2}.$$

$$(c) \mathbf{P}(Y = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3-1} \text{ soit } \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{3(n-1)^2}{n^3}.$$

5. (a) Au minimum, on ne pioche jamais la boule 1 ($Z = 0$) et au maximum on la pioche 4 fois. Ainsi, $Z(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

(b) Les événements $[X = i]$ pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ forment un système complet d'événements (SCE).

(c) D'après la formule des probabilités totales associée à ce SCE :

$$\forall k \in Z(\Omega), \mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}(X = i) \times \mathbf{P}_{[X=i]}(Z = k)$$

Mais $\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{6}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $\mathbf{P}(X = 4) = \frac{1}{2}$

donc :

$$\mathbf{P}(Z = k) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_{[X=i]}(Z = k) + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{[X=4]}(Z = k)$$

On pose $p = \frac{1}{n}$ et $q = 1 - p$. Lorsque $[X = i]$, le nombre de fois où la boule 1 est piochée suit une loi binomiale de paramètres i, p .

Ainsi : $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \mathbf{P}_{[X=i]}(Z = k) = \binom{i}{k} p^k q^{i-k}$.

On obtient donc: $\forall k \in Z(\Omega), \mathbf{P}(Z = k) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \binom{i}{k} p^k q^{i-k} + \frac{1}{2} \binom{4}{k} p^k q^{4-k}$

(d) Soient $p, q \geq 0$ tels que $p + q = 1$. On considère une VAR T telle que $T \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$.

Alors $\mathbf{E}(T) = ip$ avec $\mathbf{E}(T) = \sum_{k=0}^i k \binom{i}{k} p^k q^{i-k}$. On a donc l'égalité demandée.

(e).

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z) &= \sum_{k=0}^4 k\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{k=0}^4 k \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \binom{i}{k} p^k q^{i-k} + \frac{1}{2} \binom{4}{k} p^k q^{4-k} \right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^i k \binom{i}{k} p^k q^{i-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 k \binom{4}{k} p^k q^{4-k} \quad \text{en échantillant les sommes} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 ip + \frac{1}{2} \times 4p \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{p}{6} \times 6 + 2p \quad \text{donc } \mathbf{E}(Z) = 3p = \frac{3}{n} = \mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

```
6. import numpy.random as rd
2 def X() :
3     r = rd.random()
4     if r < 1/6 : return 1
5     elif r < 1/3 : return 2
6     elif r < 1/2: return 3
7     else: return 4
```