Exercice 1 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement, sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
2. La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{12}$

3. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{8}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{19}{24}$ et $V(X) = \frac{77}{192}$.
4. On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et

k	0	1
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$

Exercice 2 – Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. $\mathbb{P}(X < 1) = \frac{2}{5}$
2. $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{3}{5}$
3. $\mathbb{E}(X) = \frac{9}{20}$
4. $\mathbb{E}(X^2) = \frac{25}{4}$ et $V(X) = \frac{2419}{400}$
5. On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 3, 4\}$ et

k	0	1	3	4
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{20}$

Exercice 3 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. On a $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

2. On a

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (2n) - 2 \sum_{k=1}^{n} k \right) = \frac{1}{n(n-1)} \left(2n^2 - n(n+1) \right) = 1$$

Exercice 4 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = a3^{-k}$$

1. On a $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$ pour $a = 2$.
2.
   - La série $\sum k\mathbb{P}([X = k])$ converge absolument (on reconnaît une série géométrique convergente car de paramètre $\frac{1}{3} \in]-1,1[$), donc X admet une espérance et elle vaut
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{3^k} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{2}$$
   - La série $\sum k^2\mathbb{P}([X = k])$ converge absolument (on reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et une dérivée d'ordre 2 qui convergent car de paramètre $\frac{1}{3} \in]-1,1[$), donc X^2 admet une espérance par théorème de transfert et elle vaut
   $$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2}{3^k} = \frac{2}{9}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = 3$$
   - Comme X et X^2 admettent une espérance, par théorème de Koenig-Huygens, X admet une variance qui vaut
   $$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$
3. La probabilité que X prenne une valeur paire est donnée par,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X = 2k]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = 2k]) = \frac{1}{4}$$
De la même façon, la probabilité que X prenne une valeur impaire est donnée par
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X = 2k+1]\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = 2k+1]) = \frac{3}{4}$$
Donc X a plus de chance de prendre une valeur impaire qu'une valeur paire.
4. On a $Y = X(X-1) = X^2 - X$. Comme X et X^2 admettent une espérance (cf Question 2), par linéarité de l'espérance Y admet une espérance qui vaut
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 5 – Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, ..., n, ... et on fait les hypothèses suivantes.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la sauteur passe la hauteur n (s'il arrive à ce stade) est $\frac{1}{n}$.
- Il est éliminé dès qu'il manque un saut.

On admet que le perchiste est presque sûrement éliminé au bout d'un nombre fini de sauts. Soit alors X le nombre de sauts réussis par le perchiste.

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$
2. On a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad |(k+1)\cdot\mathbb{P}([X = k])| = \frac{1}{(k-1)!}$$
Donc la série $\sum(k+1)\cdot\mathbb{P}([X = k])$ converge absolument (série exponentielle), c'est-à-dire, par théorème de transfert, que $Y = X + 1$ admet une espérance qui est donnée par
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = \mathrm{e}$$
3. Puis $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \mathrm{e} - 1$.

Exercice 6 – On considère un jeu de 52 cartes traditionnel et on pioche une carte au hasard dans le paquet. On note alors X la valeur de la carte piochée avec la valeur 1 pour un as, 2 pour un deux, ... , 10 pour un dix, 11 pour un valet, 12 pour une dame et 13 pour un roi. Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,13 \rrbracket)$. Donc
$$\mathbb{E}(X)=7 \qquad \text{et} \qquad V(X)=14$$

Exercice 7 – On considère un jeu de 32 cartes traditionnel et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirées sont de même valeur, on dit qu'il y a "bataille" et on pose $B=1$, dans le cas contraire, on pose $B=0$. Donner la loi de B. Donner son espérance et sa variance.

$B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{31}\right)$. Donc
$$\mathbb{E}(B)=\frac{3}{31} \qquad \text{et} \qquad V(B)=\frac{84}{961}$$

Exercice 8 – On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(360,\frac{1}{6}\right)$. Donc
$$\mathbb{E}(X)=60 \qquad \text{et} \qquad V(X)=50$$

Exercice 9 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. $Y(\Omega)=\llbracket 1,n \rrbracket$.
2. Soit $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$. On a
   - Si $i=0$, alors $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k])=\frac{1}{n}$
   - Si $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, alors $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=i])=1$ et si $k \neq i$, $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=k)=0$.
3. Soit $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}([Y=k])=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}([X=i])\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k])=\frac{(1-p)^n}{n}+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
4. On obtient
$$\mathbb{E}(Y)=\frac{(1-p)^n(n+1)-2np}{2}$$

Exercice 10 – Dans une urne composée de 2 boules rouges et de 3 boules bleues, nous tirons une infinité de boules. Les tirages se font avec remise et sont supposés indépendants. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue pour la première fois. Déterminer la loi de N et son espérance.

$N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{5}\right)$. Donc
$$\mathbb{E}(N)=\frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad V(N)=\frac{10}{9}$$

Exercice 11 – On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par
$$X(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k)=\frac{1}{ek!}.$$

1. $N \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ donc $\mathbb{E}(X)=1$.
2. $Y(\Omega)=\{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([Y=2k+1])=\frac{1}{ek!}.$$
3. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(Y)=2\mathbb{E}(X)+1=3$$