Interrogation du 27/05/2024

NOM Prénom :

Pour chacune des variables aléatoires suivantes (correspondantes à des lois usuelles), donner sa **loi** (l'ensemble des valeurs prises et les probabilités associées), son **espérance** et sa **variance**.

1. X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné)
2. X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre p (pour un $p \in [0,1]$ donné)
3. X_3 suit une loi binomiale de paramètres n et p (pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ donnés)
4. X_4 suit une loi de géométrique de paramètre p (pour un $p \in [0,1]$ donné)
5. X_5 suit une loi de Poisson de paramètre λ (pour un $\lambda > 0$ donné)

1. Soit $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$. Sa loi est donnée par
$$X_1(\Omega) = [\![1,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X_1 = k]) = \frac{1}{n}$$
Son espérance et sa variance valent alors
$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = \frac{n^2-1}{12}$$
2. Soit $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Sa loi est donnée par
$$X_2(\Omega) = \{0,1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_2 = 1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 1-p$$
Son espérance et sa variance valent alors
$$\mathbb{E}(X_2) = p \qquad \text{et} \qquad V(X_2) = p(1-p)$$
3. Soit $X_3 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Sa loi est donnée par
$$X_3(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X_3 = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
Son espérance et sa variance valent alors
$$\mathbb{E}(X_3) = np \qquad \text{et} \qquad V(X_3) = np(1-p)$$
4. Soit $X_4 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Sa loi est donnée par
$$X_4(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X_4 = k]) = (1-p)^{k-1} p$$
Cette variable admet une espérance et une variance qui valent
$$\mathbb{E}(X_4) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X_4) = \frac{1-p}{p^2}$$
5. Soit $X_5 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Sa loi est donnée par
$$X_5(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X_5 = k]) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$
Cette variable admet une espérance et une variance qui valent
$$\mathbb{E}(X_5) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X_5) = \lambda$$