XXVI. Intégration sur un segment

1	**Définition de l'intégrale sur un segment**	**1**
1.1	Interprétation graphique	2
1.2	Propriétés de l'intégrale	2
1.3	Passage d'une inégalité dans une intégrale	5
1.4	Théorème fondamental du calcul intégral	7
2	**Techniques de calcul intégral**	**8**
2.1	À l'oeil	8
2.2	Changement de variables	10
2.3	Intégration par parties	11

1 Définition de l'intégrale sur un segment

Définition 1.1 Soit f une fonction **continue** sur le **segment** $[a,b]$. L'**intégrale** de f sur $[a,b]$ est le nombre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur $[a,b]$. Ce nombre ne dépend pas du choix de la primitive.

Ainsi, dans son essence, savoir calculer une *intégrale* revient à savoir calculer une *primitive*.

La variable d'intégration est muette :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\star)\mathrm{d}\star$$

Exemple 1.2 Justifier que l'intégrale $I = \int_1^2 (2x-3)\mathrm{d}x$ est bien définie et la calculer.

La fonction $x \mapsto 2x-3$ est continue sur le segment $[2,3]$. Donc l'intégrale suivante est bien définie et donnée par

$$I = \int_1^2 (2x-3)\mathrm{d}x = [x^2-3x]_1^2 = 0$$

Exemple 1.3 Calculer les intégrales suivantes.

$\int_1^4 2x\mathrm{d}x = [x^2]_1^4 = 4^2 - 1^2 = 15$ $\qquad$ $\int_{-1}^3 1\mathrm{d}x = [x]_{-1}^3 = 3-(-1) = 4$

$\int_2^3 x^2\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3}]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{2} = \frac{19}{3}$ $\qquad$ $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1$

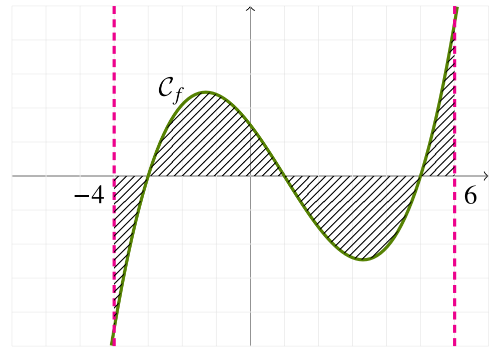
$\int_4^5 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_4^5 = \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^4$ $\qquad$ $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = [-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$

Dans la définition de l'intégrale, la borne du bas est forcément un nombre réel plus petit que la borne du haut. Si ce n'est pas le cas, par convention, on pose que

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

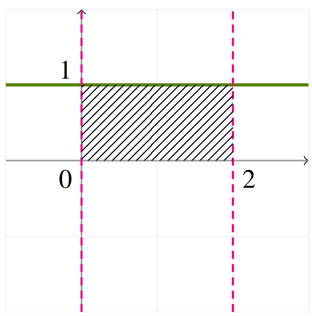
1.1 Interprétation graphique

L'intégrale d'une fonction **continue** sur un **segment** s'interprète comme **l'aire algébrique** du plan situé entre la courbe de la fonction f sur $[a,b]$ et l'axe des abscisses et délimité par les droites verticales d'abscisses a et b. De plus, cette aire est comptée positivement pour la partie située au dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en dessous.

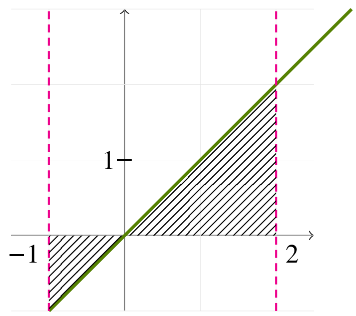


Ci-contre est représenté le calcul de l'intégrale suivante :

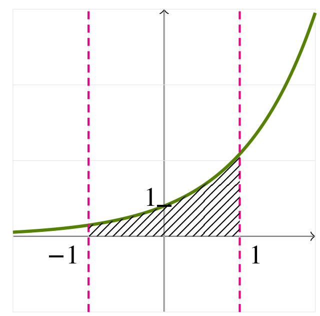
$$\int_{-4}^{6}(x+3)(x-1)(x-5)\mathrm{d}x = 0$$



$\int_0^2 1\mathrm{d}x = 1\times 2 = 2$



$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = -\frac{1\times 1}{2} + \frac{2\times 2}{2} = \frac{3}{2}$



$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \geqslant 0$

Cette interprétation de l'intégrale comme une aire est cependant restreinte. En effet, bien qu'on sache calculer l'aire d'un rectangle ou d'un triangle, de manière générale, on ne sait pas calculer de manière exacte l'aire d'un domaine quelconque. Dans ce cas, on peut effectuer des *calculs approchés d'aires* (et donc d'intégrales) grâce à diverses méthodes d'approximation comme la **méthode des rectangles**.

Proposition 1.4 Soit f une fonction **continue** sur le **segment** $[0,1]$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

```python
def calculintegrale(f,n):
    aireapp = 0
    for k in range(n):
        aireapp = aireapp + (1/n)*f(k/n)
    return aireapp
```

1.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 1.5 — Linéarité de l'intégrale. Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et λ,μ des réels. On a,

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 1.6 Justifier que l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} \left(3(x^4+2) - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

est bien définie et la calculer.

La fonction

$$x \mapsto 3(x^4+2) - \frac{x}{x^2+1}$$

est continue sur le segment $[-1,0]$ (en particulier car pour tout $x \in [-1,0]$, $x^2+1 \neq 0$) donc l'intégrale I est bien définie. De plus, par **linéarité de l'intégrale**,

$$\begin{aligned}
I &= 3\int_{-1}^{0}(x^4+2)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= 3\left[\frac{x^5}{5}+2x\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}\ln(|x^2+1|)\right]_{-1}^{0} \\
&= 3\left(0-(-\frac{11}{5})\right) - \left(\frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}\ln(2)\right) \\
&= \frac{33}{5} + \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

! L'intégrale se marie bien avec la somme, mais pas avec les multiplications. De manière générale,

$$\int_a^b f(x)\times g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \times \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Par exemple,

$$\int_0^1 x\times x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \text{alors que} \quad \int_0^1 x\mathrm{d}x \times \int_0^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Proposition 1.7 — Relation de Chasles. Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

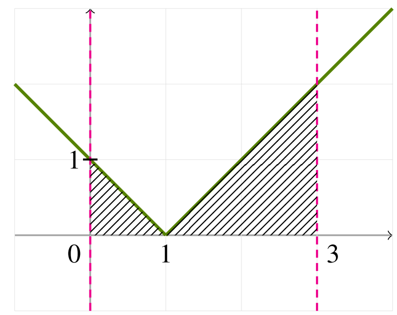
La relation de Chasles s'utilise généralement dans deux cas.

- Si l'expression fait intervenir des *valeurs absolues* : dans ce cas, on découpe l'intégrale sur les intervalles sur lesquels la quantité dans la valeur absolue est positive et ceux où elle est négative.
- Si l'*expression* de la fonction intégrée *change* sur l'intervalle considéré.

Exemple 1.8 Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 |x-1| \mathrm{d}x$.

La fonction $x \mapsto |x-1|$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur le segment $[0,3]$, l'intégrale I est bien définie. De plus, en utilisant la **relation de Chasles**, on a,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^3 |x-1| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |x-1| \mathrm{d}x + \int_1^3 |x-1| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 -(x-1) \mathrm{d}x + \int_1^3 (x-1) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (-x+1) \mathrm{d}x + \int_1^3 (x-1) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 \\
&= \frac{1}{2} - 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$



L'aire du triangle de gauche vaut $1/2$ et celui de droite vaut 2. Donc l'aire algébrique totale du domaine sous la courbe vaut $5/2$

Exemple 1.9 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 4x^3+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x$ et la calculer.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur le segment $[-1,1]$ car

- la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ car fonction polynomiale,
- la fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ car fonction polynomiale,
- la fonction f est continue en 0 car

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1.$$

Donc l'intégrale I est bien définie et en utilisant la **relation de Chasles**, on a,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^0 f(x) \mathrm{d}x + \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^0 (4x^3+1) \mathrm{d}x + \int_0^1 (2x+1) \mathrm{d}x \\
&= \left[x^4 + x\right]_{-1}^0 + \left[x^2 + x\right]_0^1 \\
&= 0 - 0 + 2 - 0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

1.3 Passage d'une inégalité dans une intégrale

Proposition 1.10 Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

1. **Positivité de l'intégrale**

$$\underline{\text{Si}} \quad \forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0 \quad \underline{\text{alors}} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

2. **Croissance de l'intégrale**

$$\underline{\text{Si}} \quad \forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x) \quad \underline{\text{alors}} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 1.11 Considérons la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^n x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

6. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale I_n est bien définie car la fonction $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-x}$ est **continue** sur le **segment** $[0,1]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\forall x \in [0,1], \qquad x^n\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$$

Donc, par **positivité de l'intégrale,** on a

$$I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \geqslant 0$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in [0,1], \qquad x^n \geqslant x^{n+1} \qquad \text{et donc} \qquad x^n\mathrm{e}^{-x} \geqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}$$

Donc, par **croissance de l'intégrale**, on a

$$I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \geqslant I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (d'après la Question 2) et décroissante (d'après la Question 3). Donc, d'après le **théorème de la limite monotone**, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à déterminer.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \qquad \text{et donc} \qquad x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$$

Donc, par **croissance de l'intégrale**, on a

$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}$$

6. D'après la Question 5, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc par **théorème d'encadrement**, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 1.12 — Inégalité triangulaire. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On a,

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Cette proposition sert à *estimer* des intégrales dont le signe de la fonction intégrée change/n'est pas connu.

Exercice 1.13 Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intégrale définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_{-1}^0 x^n e^x \mathrm{d}x$. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad |I_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et en déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite à déterminer.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Par **inégalité triangulaire**, on a

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_{-1}^0 x^n e^x \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-1}^0 |x^n e^x|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{-1}^0 (-x)^n e^x \mathrm{d}x && \text{car } \forall x\in\mathbb{R}, e^x \geqslant 0 \\
&\leqslant \int_{-1}^0 (-x)^n \mathrm{d}x && \text{car } \forall x\leqslant 0, e^x \leqslant 1 \\
&\leqslant (-1)^n \int_{-1}^0 x^n \mathrm{d}x \\
&\leqslant (-1)^n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^0 \\
&\leqslant (-1)^n \left(0 - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) \\
&\leqslant \frac{(-1)^{2n+2}}{n+1} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Donc, on a montré que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad |I_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc par **théorème d'encadrement**, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et cette limite vaut 0.

Proposition 1.14 Soit f une fonction continue et **positive** sur le segment $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x\in[a,b], f(x) = 0$$

! Ce résultat est faux si la fonction intégrée n'est pas positive. En effet, on peut montrer que

$$\int_{-4}^6 (x+3)(x-1)(x-5)\mathrm{d}x = 0$$

Pourtant, la fonction $x \to (x+3)(x-1)(x-5)$ n'est pas nulle sur le segment $[-4,6]$.

Cette proposition sert surtout à montrer des résultats théoriques/abstraits.

Exercice 1.15 Soit P un polynôme tel que $\int_0^1 P(x)^2 \mathrm{d}x = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

La fonction $x \mapsto P(x)^2$ est une fonction **continue** (car polynomiale) et **positive** sur le segment $[0,1]$ dont l'intégrale s'annule. Donc

$$\forall x \in [0,1], \qquad P(x)^2 = 0 \quad \text{donc} \quad \forall x \in [0,1], \qquad P(x) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une **infinité de racines** (tous les réels appartenant à l'intervalle $[0,1]$). Donc, c'est le polynome nul, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = 0$$

1.4 Théorème fondamental du calcul intégral

Proposition 1.16 — Théorème fondamental du calcul intégral. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et vérifie

$$F(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x).$$

Autrement dit, F est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a.

Exemple 1.17 On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t^3}\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t^3}$ est continue sur le segment $[0,x]$ donc, par **théorème fondamental du calcul intégral**, la fonction φ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Exemple 1.18 On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{-x}^{2x} \mathrm{e}^{-t}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(1+t^2)$ est continue sur le segment $[0,x]$ (en particulier car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 > 0$). Donc, par **théorème fondamental du calcul intégral**, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$

est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x^2)$$

Or, en utilisant la **relation de Chasles**, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-x}^{2x} \mathrm{e}^{-t}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} \mathrm{e}^{-t}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t + \int_0^{2x} \mathrm{e}^{-t}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$

Et donc,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = -F(-x) + F(2x).$$
Donc, par **composition**, la fonction φ est aussi définie et de classe C^1 et
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) &= -(-1)F'(x) + 2F'(2x) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x^2) + 2\mathrm{e}^{-2x}\ln(1+4x^2) \end{aligned}$$

2 Techniques de calcul intégral

2.1 À l'oeil

La première méthode pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ consiste à
- Déterminer une primitive F de f sur $[a,b]$
- Puis d'utiliser la formule
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

C'est la première méthode à tester. Si on ne trouve pas de *primitive* de f, alors seulement, on essaye d'appliquer les méthodes suivantes, d'*intégration par parties* et de *changement de variables*.

Exemple 2.1 — Reconnaissance de primitives usuelles.

$$\int_0^1 (5x^3 - 3x + 7)\mathrm{d}x = \left[\frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x\right]_0^1 = \frac{27}{4} \qquad x^\alpha \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\right]_{-1}^2 = \frac{\mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^{-4}}{4} \qquad \mathrm{e}^{ax} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$$

$$\int_1^2 \frac{5}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = [10\sqrt{x}]_1^2 = 10\sqrt{2} - 10 \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \sqrt{x}$$

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}^2\right) = \left[\ln(|x|) - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \ln(2) \qquad \frac{1}{x} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \ln(|x|)$$

Exemple 2.2 — Reconnaissance de formes.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) \qquad \frac{u'}{u} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \ln(|u|)$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \qquad u'u \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \frac{u^2}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{1+x^2}\right]_{-1}^1 = 0 \qquad u'u^{-\frac{1}{2}} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} 2u^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(x^2+1)^4\right]_0^1 = \frac{15}{8} \qquad u'u^3 \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \frac{u^4}{4}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{(2x+3)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2x+3}\right]_{-1}^0 = \frac{2}{3} \qquad u'u^{-2} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} -u^{-1}$$

Exemple 2.3 — Fractions rationnelles. Calculer $I = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+1}$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+1} && \text{Pas de primitive immédiate mais fraction rationnelle}\\
&= \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2} && \text{On factorise le dénominateur}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2\mathrm{d}t}{(2t+1)^2} && \text{Forme } u'u^{-2} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} -u^{-1}\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2t+1}\right]_0^3\\
&= \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

Exemple 2.4 — Fractions rationnelles. Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$ sur $[2,4]$ qui s'annule en 2.

Une telle primitive existe car la fonction $x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash -1,1$ donc en particulier sur $[2,4]$. Finalement, on cherche à calculer

$$\int_2^x \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} \quad \text{pour tout } x \in [2,4]$$

Soit $x \in [2,4]$.

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} &= \int_2^x \frac{2\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)} && \text{On factorise le dénominateur}\\
&= \int_2^x \frac{1+t+1-t}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t && \text{Décomposition en éléments simples}\\
&= \int_2^x \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t && \text{Décomposition en éléments simples}\\
&= [-\ln(|1-t|)+\ln(|1+t|)]_2^x && \frac{u'}{u} \overset{\text{prim.}}{\rightsquigarrow} \ln(|u|)\\
&= -\ln(|1-x|)+\ln(|1+x|)-\ln(3)\\
&= -\ln(x-1)+\ln(x+1)-\ln(3) && \text{car } x \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant -1
\end{aligned}$$

Donc la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{2}{1-x^2}$ sur $[2,4]$ qui s'annule en 2 est la fonction

$$x \mapsto -\ln(x-1)+\ln(x+1)-\ln(3)$$

2.2 Changement de variables

Proposition 2.5 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et a, b dans J. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Exemple 2.6 Calculer $I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $t = \ln(x)$.

En effectuant le **changement de variables** $t = \ln(x)$, on obtient

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$$

Expression	Bornes	Le dx
$t = \ln(x)$	$x \mid 1 \mid \mathrm{e}$	$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$x = \mathrm{e}^t$	$t \mid 0 \mid 1$	$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\mathrm{e}^t$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(|1+t^2|)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 2.7 Calculer $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variables $t = \mathrm{e}^x$.

En effectuant le **changement de variables** $t = \mathrm{e}^x$, on obtient

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

Expression	Bornes	Le dx
$t = \mathrm{e}^x$	$x \mid 0 \mid 1$	$\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\mathrm{e}^x$
$x = \ln(t)$	$t \mid 1 \mid \mathrm{e}$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{t}} \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= [t - \ln(|t+1|)]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}+1) - (1 - \ln(2)) \\
&= \mathrm{e} - 1 + \ln(2) - \ln(\mathrm{e}+1)
\end{aligned}$$

Exemple 2.8 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^{2x}+2e^{-x})^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. *On pourra s'aider du changement de variables $u = e^t$.*

Une telle primitive existe car la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^{2x}+2e^{-x})^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Finalement, on cherche à calculer

$$\int_0^x \frac{e^t}{(e^{2t}+2e^{-t})^2} dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le **changement de variables** $u = e^t$, on obtient

Expression	Bornes	Le dx
$u = e^t$	$t \mid 0 \mid x$	$du = dt e^t$
$t = \ln(u)$	$u \mid 1 \mid e^x$	$dt = \frac{du}{u}$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{e^t}{(e^{2t}+2e^{-t})^2} dt &= \int_1^{e^x} \frac{du}{\left(u^2+\frac{2}{u}\right)^2} \\
&= \int_1^{e^x} \frac{u^2}{\left(u^3+2\right)^2} du \\
&= \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{u^3+2}\right]_1^{e^x} \\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{3(e^{3x}+2)}
\end{aligned}$$

Donc la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^{2x}+2e^{-x})^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{9} - \frac{1}{3(e^{3x}+2)}.$$

2.3 Intégration par parties

Proposition 2.9 Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Ce résultat permet de calculer des primitives/intégrales de produits. Il y a toujours deux possibilités pour effectuer une IPP. Une façon de la faire dans "le bon sens" est de se dire qu'il faut savoir primitiver v'.

Exemple 2.10 Calculer $I = \int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$.

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{2t} & & v(t) & = & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{t\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exemple 2.11 Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Donc par **théorème fondamental du calcul intégral**, la fonction

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur $]0,+\infty[$. Soit $x \in]0,+\infty[$. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & \quad & u'(t) & = & \frac{1}{t} \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - (x-1) \\ &= x\ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$.

Exemple 2.12 Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par **théorème fondamental du calcul intégral**, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & t^2 \\ v'(t) & = & e^{-t} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 2t \\ v(t) & = & -e^{-t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x te^{-t} \times t dt \\ &= -x^2 e^{-x} + 2\int_0^x te^{-t} \times t dt \end{aligned}$$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & t \\ v'(t) & = & e^{-t} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & -e^{-t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= -x^2 e^{-x} + 2\left(\left[-te^{-t}\right]0^x + \int_0^x e^{-t}\right) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2\left[e^{-t}\right]0^x \\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2(e^{-x} - 1) \\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 2 \end{aligned}$$

Donc une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 2$.

Exemple 2.13 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_n = \int_1^e x^n \ln(x) dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & \ln(x) \\ v'(x) & = & x^n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v(x) & = & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e x^n dx \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$