

Chapitre 24 : Dimension d'un s.e.v de \mathbb{R}^n

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

Pour bien commencer : rappel sur la notion de «base»

Définition 0.1 Soient F un sev de \mathbb{R}^n et (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . On dit que la famille (u_1, \dots, u_p) est une **base** de F si

- ① Tous les vecteurs u_1, \dots, u_p appartiennent à F .
- ② La famille (u_1, \dots, u_p) est libre :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_i = 0.$$

- ③ La famille (u_1, \dots, u_p) est génératrice de F :

$$\forall u \in F, \quad \exists (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p, \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p$$

Proposition 0.2 Soient F un sev de \mathbb{R}^n et (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . La famille (u_1, \dots, u_p) est une **base** de F si et seulement si

- ① Tous les vecteurs u_1, \dots, u_p appartiennent à F :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad u_i \in F.$$

- ② Tout vecteur $u \in F$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, \dots, u_p :

$$\forall u \in F, \quad \exists! (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p, \quad u = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p$$

1 Dimension d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n

Définition 1.1 Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de F , et on le note $\dim(F)$.

? Méthode 1 - Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel

Pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ,

- On en détermine une base grâce aux Méthodes du Chapitre 20 «L'espace \mathbb{R}^n »
- On compte le nombre d'éléments que contient cette base, et cela donne la dimension.

Exemple 1.2 Montrer que la famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 , où

$$u_1 = (1, 1) \quad \text{et} \quad u_2 = (0, 2)$$

et en déduire la dimension de \mathbb{R}^2 .

Montrons que la famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 .

- ① Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent bien à \mathbb{R}^2 .
- ② Montrons que tout élément de \mathbb{R}^2 se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de u_1 et de u_2 , c'est-à-dire,

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists! (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad u = a \cdot u_1 + b \cdot u_2.$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$u = au_1 + bu_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = & x \\ a + b & = & y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = & x \\ b & = & y - x \end{cases}$$

Donc, pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple de scalaires $(a, b) = (x, y - x)$ tel que

$$u = a \cdot u_1 + b \cdot u_2$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 . Or, cette base possède deux vecteurs, donc,

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Exemple 1.3 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 donné par

$$F = \text{Vect}((1, 0), (1, -1), (2, 2))$$

- **Première étape : On détermine une famille génératrice** de F . Par construction, la famille

$$((1, 0), (1, -1), (2, 2))$$

est une famille génératrice de F .

- **Deuxième étape : On extrait une famille libre de la famille génératrice** Sauf que cette famille n'est pas libre car on peut exhiber la combinaison linéaire suivante :

$$(2, 2) = 4 \cdot (1, 0) + (-2) \cdot (1, -1)$$

et donc en particulier,

$$F = \text{Vect}((1, 0), (1, -1), (2, 2)) = \text{Vect}((1, 0), (1, -1))$$

et la famille

$$((1, 0), (1, -1))$$

est toujours une famille génératrice de F . De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre. C'est donc une base de F .

- **Troisième étape : On en déduit la dimension** de F . La famille $((1, 0), (1, -1))$ est une base de F et elle possède deux éléments. Le sous-espace vectoriel F est donc de dimension 2 :

$$\dim(F) = 2$$

Exemple 1.4 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ensemble ambiant	Sev	Dimension
\mathbb{R}^2	$\text{Vect}((1, 1))$	1
\mathbb{R}^2	$\text{Vect}((0, 0))$	0
\mathbb{R}^3	$\text{Vect}((1, -1, 2))$	1
\mathbb{R}^2	$\text{Vect}((1, 1), (2, 2))$	1
\mathbb{R}^2	$\text{Vect}((1, 1), (-1, 1))$	2
\mathbb{R}^3	$\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0))$	2

Exemple 1.5 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Déterminons la dimension du sev $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

- **Première étape : On détermine une famille génératrice de F** grâce à la méthode du Chapitre 20. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F \iff x + y + z = 0$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z .

$$u \in F \iff x = -y - z$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F &\iff u = (-y - z, y, z) \\ &\iff u = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\ &\iff u \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc,

$$F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

est génératrice de F .

- **Deuxième étape : On extrait une famille libre de la famille génératrice** grâce à la Méthode du Chapitre 20. Montrons que la famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est libre.
 - *Première méthode : via la colinéarité* (car la famille ne contient que deux vecteurs). On peut remarquer que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car sinon} \quad \begin{cases} -1 = -\lambda \\ 0 = \lambda \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \text{absurde...}$$

Donc la famille est libre.

- *Deuxième méthode : via la définition.* Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\text{donc} \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{donc} \quad \lambda_1(-1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- **Troisième étape : On en déduit la dimension de F .** Finalement, la famille (u_1, u_2) est une base de F . Ainsi, F est de dimension finie et

$$\dim(F) = \text{card}(u_1, u_2) = 2$$

Exemple 1.6 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ambiant	Sev	d° de liberté & contraintes	Dim.
\mathbb{R}^3	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$	d°liberté=3 & contraintes=1	2
\mathbb{R}^2	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$	d°liberté=2 & contraintes=1	1
\mathbb{R}^4	$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 2x - y + t = 0\}$	d°liberté=4 & contraintes=2	2
\mathbb{R}^3	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } -x - y - z = 0\}$	d°liberté=3 & contraintes=1	2

Exemple 1.7 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 suivant :

$$F = \{(a + b, a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

- **Première étape : On détermine une famille génératrice** de F . L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = (a + b, a, b) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (1, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$$

et la famille

$$((1, 1, 0), (1, 0, 1))$$

est génératrice de F .

- **Deuxième étape : On extrait une famille libre de la famille génératrice.** Les deux vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ est libre. Comme c'est une famille génératrice de F , c'est donc une base de F .
- **Troisième étape : On en déduit la dimension** de F . La famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une base de F , elle contient deux vecteurs, donc

$$\dim(F) = 2.$$

Exemple 1.8 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ambiant	Sev	Nbre de paramètres	Dim.
\mathbb{R}^2	$\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$	paramètres=1	1
\mathbb{R}^2	$\{(t, v) \mid t, v \in \mathbb{R}\}$	paramètres=2	2
\mathbb{R}^3	$\{(a + b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	paramètres=2	2
\mathbb{R}^3	$\{(a + b, a + b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	paramètres=1	1

2 La base canonique de \mathbb{R}^n

Proposition 2.1 La famille (e_1, \dots, e_n) définie par

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

est une base de \mathbb{R}^n (appelée base canonique). Ainsi, l'espace \mathbb{R}^n est de dimension n :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Exemple 2.2 Pour chacun des espaces \mathbb{R}^n ci-dessous, exhiber la base canonique associée, et la décomposition des vecteurs donnés dans la base canonique.

Ambiant	Base canonique	Une décomposition
\mathbb{R}^2	$((1, 0), (0, 1))$	$(2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$
\mathbb{R}^2	$((1, 0), (0, 1))$	$(-1, 5) = -1 \cdot (1, 0) + 5 \cdot (0, 1)$
\mathbb{R}^2	$((1, 0), (0, 1))$	$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$
\mathbb{R}^3	$((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$	$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$

Démonstration. Déjà, tous les vecteurs e_1, \dots, e_n sont dans \mathbb{R}^n . Montrons que tout élément de \mathbb{R}^n se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_n) , autrement dit que,

$$\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \exists!(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 &= x_1 \\ \vdots & \\ a_n &= x_n \end{cases}$$

Donc, pour tout $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n -uplet de scalaires $(a_1, \dots, a_n) = (x_1, \dots, x_n)$ tel que

$$u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Donc, la famille (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n . Or, cette base contient n vecteurs, donc

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

■

3 Dimension et le principe de double inclusion

Proposition 3.1 Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Alors

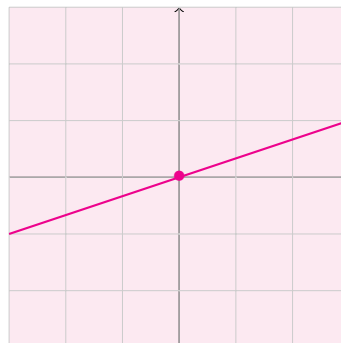
$$0 \leq \dim(F) \leq n.$$

De plus,

- $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
- $\dim(F) = n$ si et seulement si $F = \mathbb{R}^n$.

Exemple 3.2 Caractérisons les sous-espaces vectoriels possibles de \mathbb{R}^2 .

Dimension possible	Sous-espace vectoriel
0	$F = \{(0,0)\}$
1	$F = \text{Vect}(u)$ (droite vectorielle)
2	$F = \mathbb{R}^2$



Proposition 3.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . On suppose que

- ① $F \subset G$
- ② $\dim(F) = \dim(G)$

Alors, $F = G$.

? Méthode 2 - Montrer l'égalité de deux sev

Pour montrer l'égalité de deux sev F et G , on peut

- Soit raisonner par équivalence, c'est-à-dire montrer que $x \in F$ si et seulement si $x \in G$.
- Soit procéder par double inclusion, c'est-à-dire montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$
- Soit montrer que
 1. une des deux inclusions est vraie (on choisit l'inclusion «la plus facile» à démontrer)
 2. les deux espaces ont la même dimension

Exemple 3.4 Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \text{Vect}((1,1,-2), (1,-3,2))$. Montrer que $F = G$.

Montrons que $F = G$.

1. Montrons que F et G sont de même dimension.
 - L'espace F est de dimension 2 (cf Exemple 1.5).
 - La famille $((1,1,-2), (1,-3,2))$ génère G par construction et de plus, c'est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((1,1,-2), (1,-3,2))$ est une base de G . On en déduit que G est de dimension 2.
2. Montrons que $G \subset F$. Par stabilité par combinaison linéaire, il suffit de montrer que

$$(1,1,-2) \in F \quad \text{et} \quad (1,-3,2) \in F.$$

Or

$$1 + 1 + (-2) = 0 \quad \text{donc} \quad (1,1,-2) \in F$$

et

$$1 + (-3) + (2) = 0 \quad \text{donc} \quad (1,-3,2) \in F$$

Donc $G \subset F$.

Comme $G \subset F$ et que les deux ensembles sont de même dimension, on en déduit que $G = F$.

3.1 Familles libres, génératrices, bases et dimension

Proposition 3.5 Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

1. Si \mathcal{G} est une famille génératrice de E et que \mathcal{L} est une famille libre de vecteurs de E , alors

$$\text{card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E) \leq \text{card}(\mathcal{G}).$$

2. Si \mathcal{F} est une famille de vecteurs de E et que $\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E)$, alors \mathcal{F} est liée.

3. Si \mathcal{F} est une famille de vecteurs de E et que $\text{card}(\mathcal{F}) < \dim(E)$, alors \mathcal{F} n'est pas génératrice de E .

Exemple 3.6

Famille	Espace ambiant	Libre	Génère l'esp. ambiant
$\mathcal{F} = ((18, -63), (5, -6), (17, -48))$	\mathbb{R}^2	Non	On ne sait pas
$\mathcal{F} = ((1, 2, 3), (7, 2, 4))$	\mathbb{R}^3	On ne sait pas	Non
$\mathcal{F} = ((1, 2), (3, 4), (5, 6))$	\mathbb{R}^3	On ne sait pas	On ne sait pas

Proposition 3.7 Soient F un sev de \mathbb{R}^n et (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de F .

- Si la famille (u_1, \dots, u_p) est libre et que $\text{card}(u_1, \dots, u_p) = \dim(F)$, alors la famille (u_1, \dots, u_p) est une base de F .
- Si la famille (u_1, \dots, u_p) génère F et que $\text{card}(u_1, \dots, u_p) = \dim(F)$, alors la famille (u_1, \dots, u_p) est une base de F .



Méthode 3 - Montrer qu'une famille est une base de F connaissant sa dimension

Pour montrer qu'une famille est une base de F , connaissant la dimension de F , on peut

- ① Montrer que tous les vecteurs de la famille sont dans l'espace.
- ② Montrer que la famille est libre (ou génératrice, mais c'est souvent plus simple de montrer qu'elle est libre).
- ③ Montrer que la famille possède autant d'éléments que la dimension de l'espace.

Exemple 3.8 Soient $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (1, -3)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Montrons que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^2 .

- ① Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent bien à \mathbb{R}^2 .
- ② Montrons que la famille \mathcal{B} est libre.
 - *Première méthode : via la colinéarité* (car la famille ne contient que deux vecteurs).
On peut remarquer que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{car sinon} \quad \begin{cases} 1 = \lambda \\ 2 = -3\lambda \end{cases} \quad \text{absurde...}$$

Donc la famille est libre.

- *Deuxième méthode : via la définition.* Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\
\text{donc} \quad & \lambda_1(1,2) + \lambda_2(1,-3) = (0,0) \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -5\lambda_2 = 0 \end{cases} \\
\text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Donc la famille (u_1, u_2) est libre.

③ On sait que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et que $\text{card}(\mathcal{B}) = 2$ donc $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^2)$.

4 Rang d'une famille

Définition 4.1 Soient (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle **rang** de la famille (u_1, \dots, u_p) et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille (u_1, \dots, u_p) , c'est-à-dire,

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$$

? Méthode 4 - Déterminer le rang d'une famille de vecteurs

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on détermine la dimension de l'espace engendré par cette famille.

Exemple 4.2

Famille	Ensemble associé F	Base de F	Rang
$\mathcal{F} = ((1,0), (1,1), (3,-2))$	$F = \text{Vect}((1,0), (1,1), (3,-2))$	$((1,0), (1,1))$	$\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$
$\mathcal{F} = ((2,1,0), (-1,0,1))$	$F = \text{Vect}((2,1,0), (-1,0,1))$	$((2,1,0), (-1,0,1))$	$\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$
$\mathcal{F} = ((1,1,-2), (1,-3,2))$	$F = \text{Vect}((1,1,-2), (1,-3,2))$	$((1,1,-2), (1,-3,2))$	$\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$