XXVIII. Équations Différentielles Linéaires

1 Généralité sur les Équations Différentielles

1.1 Notion de solution d'une équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation (fonctionnelle) reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées. Dans la suite, on va s'intéresser plus précisément à des équations différentielles **linéaires**.

Définition 1.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ des fonctions définies et continues sur I. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n une équation de la forme

$$(\mathrm{E}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = b,$$

où $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

- Une **solution** de cette équation est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I, \qquad f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) f^{(n-1)}(t) + \cdots a_1(t) f'(t) + a_0(t) f(t) = b(t)$$

- **Résoudre** une équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

! Une équation différentielle est une *équation fonctionnelle*, c'est-à-dire faisant intervenir des fonctions (et non pas des nombres réels). Par exemple, si l'on considère l'équation différentielle

$$y'' + 3y = g, \qquad \text{où} \qquad g : t \mapsto \mathrm{e}^t + t^2 - 1$$

une solution f d'une telle équation différentielle est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\underbrace{f'' + 3f = g}_{\text{égalité de fonctions}} \qquad \text{c-à-d} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{f''(t) + 3f(t) = g(t)}_{\text{égalité de nbrs réels}}$$

Cependant, pour éviter de nommer le second membre, on écrira l'équation différentielle plutôt comme ceci,

$$y'' + 3y = \mathrm{e}^t + t^2 - 1.$$

Il faut bien comprendre que c'est un *abus de notation* : le membre de gauche de l'égalité est une fonction alors que le membre de droite est un réel, et la variable t n'est même pas quantitiée...

Exemple 1.2 Montrer que la fonction $f : t \mapsto \exp(t)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

La fonction $f : t \mapsto \exp(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) - f(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t = 0.$$

Donc la fonction f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Exemple 1.3 Montrer que la fonction $f : t \mapsto \exp(-2t) + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 3t$.

La fonction $f : t \mapsto \exp(-2t) + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + 2f(t) = -2\exp(-2t) + \frac{3}{2} + 2\left(\exp(-2t) + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\right) = 3t.$$

Donc la fonction f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 3t$.

Exemple 1.4 Montrer que la fonction $f : t \mapsto \exp(5t) + 2t$ est une solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à déterminer.

La fonction $f : t \mapsto \exp(5t) + 2t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = 5\exp(5t) + 2 = 5\left(f(t) - 2t\right) + 2 = 5f(t) - 10t$$

Donc la fonction f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 5y = -10t$.

1.2 Équation différentielle homogène associée

Définition 1.5 — Équation Différentielle Homogène associée. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ des fonctions définies et continues sur I, et (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre n suivante

$$(\mathrm{E}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = b.$$

On appelle **équation différentielle homogène associée** l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{EH}) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Exemple 1.6 Donner les différentes équations différentielles homogènes associées.

Équa. Diff.	Équa. Diff. Homogène associée
$y' + 2y = 3t$	$y' + 2y = 0$
$y' = \frac{1}{t+1}$	$y' = 0$
$y' + 2y = 0$	$y' + 2y = 0$
$y' - 5y + t = 0$	$y' - 5y = 0$
$y'' - y = \mathrm{e}^{2t}$	$y'' - y = 0$
$y'' + y' - 2y = 3$	$y'' + y' - 2y = 0$

Proposition 1.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ des fonctions définies et continues sur I et

$$(\mathrm{EH}) : \; y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

une équation différentielle linéaire d'ordre 1 **homogène**.

- La fonction nulle est toujours solution de (EH).
- Si h et g sont des solutions de (EH) et λ, μ sont des réels, alors la fonction $\lambda h + \mu g$ est aussi une solution de (EH).

On dit que l'ensemble des solutions de (EH) est un *sous-espace vectoriel* de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (HP).

1.3 Présentation du principe de résolution sur un exemple

Exemple 1.8 Soit (E) : $y' - 2ty = 2t^2 - 1$ où $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue. On cherche à résoudre cette équation différentielle.

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- **Étape 1 : Trouver <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *homogène* associée.**

  L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

  $$(\mathrm{EH}) : y' - 2ty = 0$$

  Montrons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : t \mapsto \lambda \exp(t^2)$ est une solution de (EH).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - Et,
  $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_\lambda'(t) - 2t f_\lambda(t) = \lambda 2t \exp(t^2) - 2t\lambda \exp(t^2) = 0$$

  On admet que l'on a bien trouvé toutes les solutions de (EH).

- **Étape 2 : Trouver une *solution particulière* de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Indication de l'énoncé : On pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : t \mapsto at+b$ où a et b sont des constantes à déterminer. Soient a et b deux réels et $y_p : t \mapsto at+b$. La fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de (E)} &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) - 2ty_p(t) = 2t^2 - 1 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a - 2t(at+b) = 2t^2 - 1 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -2at^2 - 2bt + a = 2t^2 - 1 \\
&\iff \begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = 0 \\ a = -1 \end{cases} \qquad \text{(identification des coefficients)} \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \\
&\iff y_p : t \mapsto -t
\end{aligned}$$

- **Étape 3 : En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Montrons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\lambda : t \mapsto \lambda \exp(t^2) - t$ est une solution de (E).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - La fonction g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - Et,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_\lambda'(t) - 2tg_\lambda(t) = \lambda 2t \exp(t^2) - 1 - 2t(\lambda \exp(t^2) - t) = 2t^2 - 1$$

  On admet que l'on a bien trouvé toutes les solutions de (E).

? Le principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire est le suivant :

solution générale de l'EDL = **solution générale de l'équation *homogène* associée** + **solution *particulière* de l'EDL**

1.4 Principe de superposition

Proposition 1.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2$ des fonctions définies et continues sur I. On considère les équations différentielles suivantes :

$$\text{(E1)} : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad \text{(E2)} : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution de (E1) et f_2 est une solution de (E2) alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

Ce principe de superposition peut aider à trouver une solution particulière d'une équation différentielle. Par exemple,

- Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = 1$ est

$$t \mapsto 1$$

- Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = t$ est

$$t \mapsto t - 1$$

- Donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = 3 + 2t$ est

$$t \mapsto 3 \times 1 + 2 \times (t-1) \qquad \text{c-à-d} \qquad t \mapsto 2t+1$$

Vérification : La fonction $f : t \mapsto 2t+1$ est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + f(t) = 2 + 2t + 1 = 2t + 3 \qquad \checkmark$$

2 EDL du premier ordre à coefficient constant

Définition 2.1 On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant** toute équation de la forme

$$y' + ay = b$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I.

Exemple 2.2 Reconnaître les différentes équations différentielles linéaire du premier ordre.

Équa. Diff.	Intervalle I	Constante a	Fonction b
$y' + 2y = 3t$	$I = \mathbb{R}$	$a = 2$	$t \mapsto 3t$
$y' + 2y = 0$	$I = \mathbb{R}$	$a = 2$	$t \mapsto 0$
$y' - 5y + t = 0$	$I = \mathbb{R}$	$a = -5$	$t \mapsto -t$
$2y' + 3y - 6 = 0$	$I = \mathbb{R}$	$a = \frac{3}{2}$	$t \mapsto 3$

Au vu du principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire, l'idéal serait de comprendre comment :

- Résoudre l'équation différentielle *homogène* $y' + ay = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}$)
- Comment trouver une solution *particulière* de $y' + ay = b$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et b continue)

2.1 Résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$

Proposition 2.3 — Résolution de $y' + ay = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$f \text{ est solution de l'EDL1 } y' + ay = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda e^{-at}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (EH) : $y' + ay = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-at} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

L'équation différentielle (EH) admet donc une infinité de solutions.

Exemple 2.4 Donner les solutions des équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficient constant suivantes.

Équa. Diff.	Solutions
$y' - 5y = 0$	$t \mapsto \lambda e^{5t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
$y' + 2y = 0$	$t \mapsto \lambda e^{-2t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
$y' + \frac{3}{2}y = 0$	$t \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

2.2 Trouver une solution particulière de $y' + ay = b$

Pour la recherche de solutions particulières d'une EDL1 avec second membre, il n'y a pas de règle générale.

- Soit on trouve une solution évidente. Par exemple,

Proposition 2.5 Soient a et b deux réels. Alors, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{b}{a} \end{array}$$

est une solution particulière de l'EDL1 $y' + ay = b$. À retenir : Si le second membre est une constante, on peut chercher une solution particulière sous forme d'une constante.

Démonstration. Soient a et b deux réels. On considère (E) : $y' + ay = b$. Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{b}{a} \end{array}$$

Alors,

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Et,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + af(t) = 0 + a \times \frac{b}{a} = b$$

■

- Soit on se laisse guider par l'énoncé.

2.3 Résolution de l'équation différentielle $y' + ay = b$

Proposition 2.6 — Résolution de $y' + ay = b$. Soient (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant définie sur I et y_p une solution particulière de l'équation (E) sur I.

$$f \text{ est solution de l'EDL1 } y' + ay = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda e^{-at} + y_p(t)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) : $y' + ay = b$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-at} + y_p(t) \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

L'équation différentielle (E) admet donc une infinité de solutions.

Méthode 1 - Résoudre une EDL1 à coefficient constant.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant, on peut,

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Trouver une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exemple 2.7 Résoudre (E) : $y' + 2y = 3t$ sur $\mathbb{R}$.

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.

- **Étape 1 : Trouver <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *homogène* associée.**

  L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$\text{(EH)} : y' + 2y = 0$$

  Les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Étape 2 : Trouver <u>une</u> *solution particulière* de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Indication de l'énoncé : On pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : t \mapsto at+b$ où a et b sont des constantes à déterminer. Soient a et b deux réels et $y_p : t \mapsto at+b$. La fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) + 2y_p(t) = 3t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ a + 2(at+b) = 3t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2at + (a+2b) = 3t \\
&\iff \begin{cases} 2a = 3 \\ a + 2b = 0 \end{cases} && \text{(identification des coefficients)} \\
&\iff \begin{cases} a = 3/2 \\ b = -3/4 \end{cases} \\
&\iff y_p : t \mapsto \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

- **Étape 3 : En déduire <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- ***Vérification*.**

  Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \lambda e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + 2f(t) = -2\lambda e^{-2t} + \frac{3}{2} + 2\left(\lambda e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\right) = 3t \qquad \checkmark$$

Exemple 2.8 Résoudre (E) : $2y' + 3y - 6 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  Tout d'abord,

$$\text{(E)} \qquad \iff \qquad y' + \frac{3}{2}y = 3$$

  L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.

- **Étape 1 : Trouver <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *homogène* associée.**

  L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$\text{(EH)} : y' + \frac{3}{2}y = 0$$

  Les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-\frac{3}{2}t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Étape 2 : Trouver <u>une</u> *solution particulière* de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Comme le second membre est une fonction constante, on peut chercher la solution particulière sous forme d'une constante. Soient a un réel et $y_p : t \mapsto a$. La fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) + \frac{3}{2}y_p(t) = 3 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 0 + \frac{3}{2}a = 3 \\
&\iff a = 2 \\
&\iff y_p : t \mapsto 2
\end{aligned}$$

- **Étape 3 : En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-\frac{3}{2}t}+2 \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- ***Vérification.***

  Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}t}+2$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t)+\frac{3}{2}f(t) = -\lambda\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{3}{2}(\lambda e^{-\frac{3}{2}t}+2) = 3 \qquad \checkmark$$

Exemple 2.9 Résoudre (E) : $y' = \frac{1}{t+1}$ sur $]-1,+\infty[$.

En fait, cela revient à déterminer toutes les primitives de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ sur $]-1,+\infty[$.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(|t+1|)+\lambda \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{c-à-d} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t+1)+\lambda \end{array} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3 EDL du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1 On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant** toute équation de la forme

$$y''+a_1y'+a_0y = b$$

où $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I.

Exemple 3.2 Reconnaître les différentes équations différentielles linéaire du premier ordre.

Équa. Diff.	Intervalle I	Constante a_1	Constante a_0	Fonction b
$y''-y'-6y = 0$	$I = \mathbb{R}$	$a_1 = -1$	$a_0 = -6$	$t \mapsto 0$
$y''+2y'+y = 1$	$I = \mathbb{R}$	$a_1 = 2$	$a_0 = 1$	$t \mapsto 1$
$y''-4y = 4t+1$	$I = \mathbb{R}$	$a_1 = 0$	$a_0 = -4$	$t \mapsto 4t+1$

Au vu du principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire, l'idéal serait de comprendre comment :

- Résoudre l'équation différentielle *homogène* $y''+a_1y'+a_0y = 0$ (avec $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$)
- Comment trouver une solution *particulière* de $y''+a_1y'+a_0y = b$ (avec $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ et b continue)

Définition 3.3 Soient $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. L'**équation caractéristique** associée à l'équation différentielle homogène $y''+a_1y'+a_0y = 0$ est donnée par

$$r^2+a_1r+a_0 = 0$$

3.1 Résoudre l'équation différentielle homogène $y''+a_1y'+a_0y = 0$

Proposition 3.4 — Résolution de $y''+a_1y'+a_0y = 0$. Soient $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2+a_1r+a_0 = 0$.

1. **Premier cas : $\Delta > 0$.** Alors, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas,

$$f \text{ est solution de l'EDL2 } y''+a_1y'+a_0y = 0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda e^{r_1t}+\mu e^{r_2t}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (EH) : $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2. **Deuxième cas : $\Delta = 0$.** Alors, l'équation caractéristique admet une unique solution réelle r_0. Dans ce cas,

$$f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (EH) : $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \end{array} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Dans tous les cas, l'équation différentielle (EH) admet donc une infinité de solutions.

Exemple 3.5 Donner les solutions des équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficient constant suivantes.

Équa. Diff.	Eq. Carac	Δ	Sol. Eq. Carac.	Sol. Équa. Diff.
$y'' + y' - 6y = 0$	$r^2 + r + 6 = 0$	$\Delta = 25 > 0$	-3 et 2	$t \mapsto \lambda e^{-3t} + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$y'' + 8y' + 16y = 0$	$r^2 + 8r + 16 = 0$	$\Delta = 0$	4	$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{4t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3.2 Trouver une solution particulière de $y'' + a_1 y' + a_0 = b$

Pour la recherche de solutions particulières d'une EDL1 avec second membre, il n'y a pas de règle générale.

- Soit on trouve une solution évidente. Par exemple,

Proposition 3.6 Soit (E) une équation différentielle de la forme $y'' + a_1 y' + a_0 = b$ avec a_1, a_0 et b des constantes.

Condition	Une solution particulière
$a_0 \neq 0$	$y_p : t \mapsto \frac{c}{b}$
$a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$	$y_p : t \mapsto \frac{c}{a} t$
$a_0 = a_1 = 0$	$y_p : t \mapsto \frac{c}{2} t^2$

- Soit on se laisse guider par l'énoncé.

3.3 Résolution de l'équation différentielle $y'' + a_1 y' + a_0 = b$

Proposition 3.7 — Résolution de $y'' + a_1 y' + a_0 = b$. Soient (E) une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant définie sur I et y_p une solution particulière de l'équation (E) sur I.

1. **Premier cas : $\Delta > 0$.** Alors, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas,

$$f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + y_p(t)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) : $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} + y_p(t) \end{array} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2. **Deuxième cas : $\Delta = 0$.** Alors, l'équation caractéristique admet une unique solution réelle r_0. Dans ce cas,

$$f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t} + y_p(t)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) : $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)e^{r_0 t} + y_p(t) \end{array} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

L'équation différentielle (E) admet donc une infinité de solutions.

Méthode 2 - Résoudre une EDL2 à coefficient constant.
Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant, on peut,
1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
2. Trouver une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exemple 3.8 Résoudre (E) : $y'' - y = e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constant.
- **Étape 1 : Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle *homogène* associée.**

  L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$\text{(EH)} : y'' - y = 0$$

  L'équation caractéristique associée est

$$r^2 - 1 = 0$$

  dont le discriminant est $\Delta = 4 > 0$ et qui admet deux racines réelles -1 et 1.
  Les solutions de (EH) sont alors les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{t} + \mu e^{-t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Étape 2 : Trouver une *solution particulière* de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Indication de l'énoncé : On pourra chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : t \mapsto ce^{2t}$ où c est une constante à déterminer. Soient c un réel et $y_p : t \mapsto ce^{2t}$. La fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ y_p''(t) - y_p(t) = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 4ce^{2t} - ce^{2t} = e^{2t} \\ &\iff 4c - c = 1 \\ &\iff c = \frac{1}{3} \\ &\iff y_p : t \mapsto \frac{1}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

- **Étape 3 : En déduire <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{t} + \mu e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- ***Vérification*.**

  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \lambda e^{t} + \mu e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) - f(t) = \lambda e^{t} + \mu e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} - (\lambda e^{t} + \mu e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}) = e^{2t} \qquad \checkmark$$

Exemple 3.9 Résoudre (E) : $y'' + 2y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constant.

- **Étape 1 : Trouver <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *homogène* associée.**

  L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$\text{(EH)} : y'' + 2y' + y = 0$$

  L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

  dont le discriminant est $\Delta = 0$ et qui admet une unique racine réelle -1.
  Les solutions de (EH) sont alors les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)e^{-t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Étape 2 : Trouver <u>une</u> *solution particulière* de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Le second membre est une constante donc on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : t \mapsto c$ où c est une constante à déterminer. Soient c un réel et $y_p : t \mapsto c$.
  La fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} y_p \text{ solution de } (E) & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) = 1 \\ & \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ 0 + 0 + c = 1 \\ & \iff & c = 1 \\ & \iff & y_p : t \mapsto 1 \end{array}$$

- **Étape 3 : En déduire <u>toutes</u> les solutions de l'équation différentielle *avec second membre*.**

  Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)e^{-t} + 1 \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- ***Vérification*.**

  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t} + 1$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + 2f'(t) + f(t) = (\lambda t - 2\lambda + \mu)e^{-t} + 2(-\lambda t + \lambda - \mu)e^{-t} + (\lambda t + \mu)e^{-t} + 1 = 1 \quad \checkmark$$

4 Trajectoires

4.1 Problème de Cauchy

D'après ce qui précède, une EDL1 ou EDL2 à coefficients constants admet une infinité de solutions. En revanche, les théorèmes suivants permettent, grâce à une ou plusieurs *contraintes* supplémentaires, d'obtenir l'*unicité* d'une solution.

Proposition 4.1 — Problème de Cauchy pour une EDL1. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Proposition 4.2 — Problème de Cauchy pour une EDL2. Soient $t_0 \in I$ et $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y = b \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

? **Méthode 3 - Comment résoudre un problème de Cauchy.**

Pour résoudre un problème de Cauchy, on peut,

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle associée (sans se soucier des conditions initiales)
2. Déterminer les valeurs des constantes qui permettent de vérifier les conditions initiales

Exemple 4.3 Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} y' + 2y = 3t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  L'équation différentielle associée au problème de Cauchy (P) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.

- **Étape 1 : Résoudre l'équation différentielle.**

  Les solutions de (E) sont (cf. Exemple 2.7) les fonctions de la forme

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Étape 2 : Déterminer la constante qui permet de vérifier la condition initiale.**

  Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f_λ la fonction définie à l'Étape 1. Alors

$$f_\lambda(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda - \frac{3}{4} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{7}{4}$$

- **Conclusion.**

  Ainsi, le problème de Cauchy (P) admet une unique solution donnée par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{7}{4}e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \end{array}$$

- ***Vérification.*** *On peut vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, qu'elle vérifie $f(0) = 1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + 2f(t) = 3t$.*

Exemple 4.4 Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}): \begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

- **Étape 0 : Donner la *nature* de l'équation différentielle étudiée.**

  L'équation différentielle associée au problème de Cauchy (P) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Étape 1 : Résoudre l'équation différentielle.**

  Les solutions de (E) sont (cf. Exemple 3.8) les fonctions de la forme

$$f_{\lambda,\mu}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \end{array} \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- **Étape 2 : Déterminer la constante qui permet de vérifier la condition initiale.**

  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_{\lambda,\mu}$ la fonction définie à l'Étape 1. Alors

$$\begin{cases} f_{\lambda,\mu}(0) = 0 \\ f'_{\lambda,\mu}(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \frac{1}{3} = 0 \\ \lambda - \mu + \frac{2}{3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

- **Conclusion.**

  Ainsi, le problème de Cauchy (P) admet une unique solution donnée par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \end{array}$$

- ***Vérification.*** *On peut vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, qu'elle vérifie $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) - f(t) = \mathrm{e}^{2t}$.*

4.2 Notion de trajectoire

Définition 4.5 Une **trajectoire** d'une équation différentielle sur I est l'ensemble $\{(t, y(t)),\ t \in I\}$ où y est une solution de (E). Cela correspond à la courbe représentative d'une solution de cette équation différentielle dans un repère du plan.

Deux trajectoires d'une même équation différentielle linéaire ne peuvent pas se couper. En effet, si deux solutions y_1 et y_2 d'une EDL1 avaient un point commun (t_0, x_0), alors on aurait $y_1(t_0) = x_0 = y_2(t_0)$ et donc $y_1 = y_2$ par le principe d'unicité cité dans la section précédente.

Exemple 4.6 On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant suivante

$$(\mathrm{E}): \ y' + 2y = 1$$

On peut montrer ue les solutions sont les fonctions

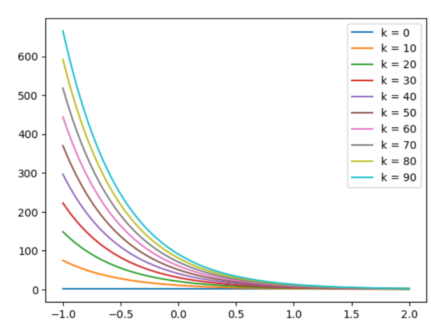
$$y_k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & k\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} \end{array}$$

Il y a une infinité de solutions, mais on peut en représenter quelques une avec python pour visualiser les trajectoires.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

t = np.linspace(-1,2, 100)

for k in range(0, 100, 10):
    yk = k*np.exp(-2*t) + 1/2
    plt.plot(t,yk, label = 'k = '+str(k))
plt.legend()
plt.show()
```



Définition 4.7 On **appelle trajectoire d'équilibre** toute trajectoire associée à une solution constante. Cela correspond aux trajectoires horizontales (s'il y en a).

Exemple 4.8 Déterminer les trajectoires d'équilibre de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 1$.

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto c$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \ f'(t) + 2f(t) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \ 0 + 2c = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad c = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad f : t \mapsto \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une unique trajectoire d'équilibre $y_0 : t \mapsto \frac{1}{2}$.

Définition 4.9 — Convergence. On dit qu'une solution d'une équation différentielle sur I, voisinage de $+\infty$, **converge** lorsque sa limite en $+\infty$ est réelle.

Exemple 4.10 Dans l'exemple précédent, les solutions ont toutes pour limite $1 \in \mathbb{R}$ donc elles convergent toutes. Et on remarque, qu'elles *convergent vers la trajectoire d'équilibre*. Cela est un résultat général.

Proposition 4.11 Une solution convergente converge forcément vers une trajectoire d'équilibre (il peut y avoir plusieurs trajectoires d'équilibre).