

TD 25 – VARIABLES ALÉATOIRES INFINIES

Savoir déterminer et manipuler une loi

Exercice 1 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Vérifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = k)$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

2. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 2 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = a3^{-k}$$

1. Déterminer la valeur du paramètre a .
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3. X a-t-elle plus de chance de prendre une valeur paire ou une valeur impaire ?
4. On pose $Y = X(X - 1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 3 – On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} telle que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4 – On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ telle que

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{4(n-1)}{3^n}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 5 – Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$ et on fait les hypothèses suivantes.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la sauteur passe la hauteur n (s'il arrive à ce stade) est $1/n$.
- Il est éliminé dès qu'il manque un saut.

On admet que le perchiste est presque sûrement éliminé au bout d'un nombre fini de sauts. Soit alors X le nombre de sauts réussis par le perchiste.

1. Déterminer la loi de X .
2. À l'aide du théorème de transfert, montrer que $Y = X + 1$ admet une espérance et la calculer.
3. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 6 – Soit Y un variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-k-1}$$

Calculer la probabilité que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 7 – Dans une urne composée de 2 boules rouges et de 3 boules bleues, nous tirons une infinité de boules. Les tirages se font avec remise et sont supposés indépendants. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue pour la première fois. Déterminer la loi de N et son espérance.

Exercice 8 – Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement deux fois. On note S la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle manche l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T .

Exercice 9 – On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

1. Reconnaître la loi de X . En déduire son espérance et sa variance.
2. Soit $n \geq 1$. Déterminer $\mathbb{P}(X \leq n)$.

Exercice 10 – On considère la variable aléatoire T dont la loi est donnée par

$$T(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([T = k]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

On pose $Y = T + 1$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(T = k - 1)$.
3. En déduire la loi de Y et reconnaître une loi usuelle.
4. En déduire l'espérance et la variance de Y .
5. En déduire l'espérance et la variance de T .

Exercice 11 – On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{e k!}.$$

1. Reconnaître la loi de X . En déduire son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.
3. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

Exercice 12 – Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. On note Z la variable aléatoire égale au maximum de X_1 et de X_2 .

1. Que vaut $Z(\Omega)$?

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq n)$.
3. Justifier que

$$[Z \leq n] = [X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]$$

4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([Z \leq n])$.
5. Justifier que

$$\mathbb{P}([Z = n]) = \mathbb{P}([Z \leq n]) - \mathbb{P}([Z \leq n - 1])$$

6. En déduire $\mathbb{P}([Z = n])$.
7. Vérifier que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}([Z = n])$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = n]) = 1$$