XXIX. Convexité

La *convexité* est une notion importante par exemple en *optimisation* grâce au résultat suivant.

Proposition 0.1 Si f est convexe et de classe $\mathbb{C}^2$ sur un intervalle I ouvert et que $f('a) = 0$ pour un certain $a \in I$ alors f admet un minimum en a.

1 Fonctions concaves & convexes

Définition 1.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

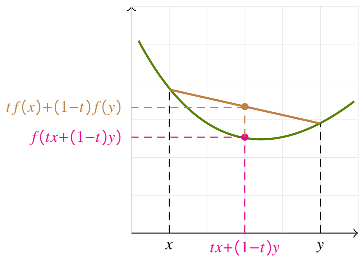
1. f est dite **convexe** lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

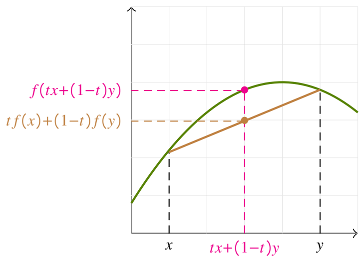
2. f est dite **concave** lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

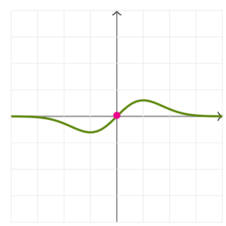
3. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet un **point d'inflexion** en $a \in I$ si f change de convexité en a.



La courbe d'une fonction *convexe* est située *en dessous de ses cordes*.



La courbe d'une fonction *concave* est située *au dessus de ses cordes*.



La courbe de cette fonction est d'abord *convexe* sur $]-\infty, 0]$ puis *concave* sur $[0, +\infty[$. Elle comporte un point d'inflexion en 0.

Exercice 1.2 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$, il s'agit de montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

c'est-à-dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx + (1-t)y\big) - tf(x) + (1-t)f(y) \leqslant 0.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. On a,

$$\begin{aligned} f\big(tx + (1-t)y\big) - tf(x) + (1-t)f(y) &= (tx + (1-t)y)^2 - tx^2 - (1-t)y^2 \\ &= t^2x^2 + 2t(1-t)xy + y^2 - tx^2 - (1-t)y^2 \\ &= t(t-1)x^2 + t(1-t)y^2 2t(1-t)xy \\ &= t(t-1)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= t(t-1)(x-y)^2 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

car $(x-y)^2 \geqslant 0$, $t \leqslant 0$ et $t - 1 \geqslant 0$ (car $t \leqslant 1$). Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On voit que démontrer de la convexité grâce à la définition est un peu fastidieux... On va donc chercher des caractérisations de la convexité plus facile à mettre en oeuvre.

2 Caractérisation de la convexité

Proposition 2.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

- **Caractérisation de la convexité :**

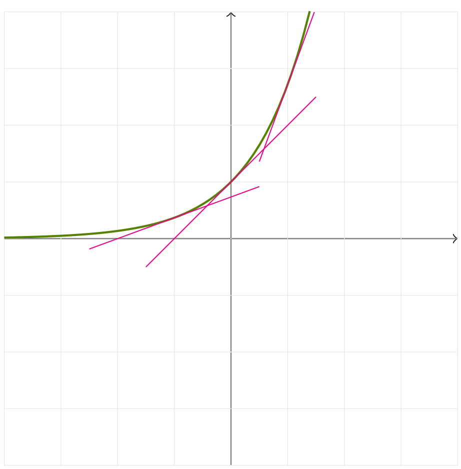
$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I &\iff \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de ses tangentes} \\ &\iff \forall x, a \in I, f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a) \\ &\iff f' \text{est croissante sur } I \\ &\iff \forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

- **Caractérisation de la concavité :**

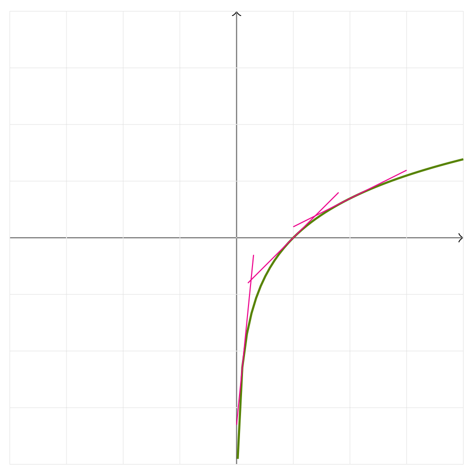
$$\begin{aligned} f \text{ est concave sur } I &\iff \mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de ses tangentes} \\ &\iff \forall x, a \in I, f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a) \\ &\iff f' \text{est décroissante sur } I \\ &\iff \forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

? Comment utiliser ces caractérisations ?

- La méthode la plus simple pour démontrer la *convexité/concavité* d'une fonction consiste donc à montrer que la *dérivée seconde* de la fonction est toujours positive/toujours négative.
- On utilise le fait qu'une fonction convexe est toujours au dessus de ses tangentes pour démontrer des inégalités lorsque l'on sait déjà que la fonction est convexe.



La fonction exponentielle est *convexe*. Sa courbe est située *au-dessus de ses tangentes*.



La fonction logarithme est *concave*. Sa courbe est située *en-dessous de ses tangentes*.

? Pour tracer de la manière la plus précise la courbe d'une fonction, on peut

- Faire apparaître des *valeurs* de la fonction sur la courbe ;
- Faire apparaître les *limites* de la fonction aux extrémités de l'intervalle considéré ;
- Faire apparaître les *variations* de la fonction ;
- Faire apparaître la *convexité* de la fonction ;
- Faire apparaître les *asymptotes* verticales/horizontales ;
- Faire apparaître les *minima/maxima*.

Exemple 2.2 — Représentation graphique d'une fonction. Représenter de la manière la plus précise possible le graphe de la fonction suivante

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

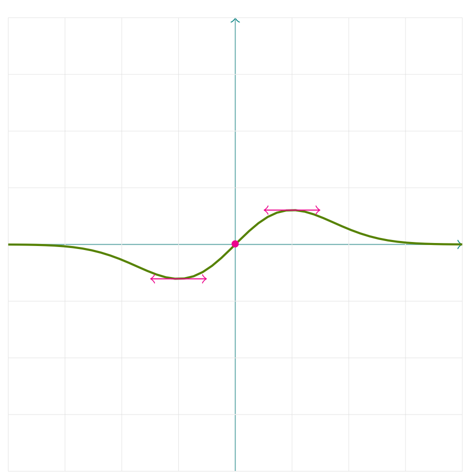
Cherchons des informations sur la fonction f afin de la représenter au mieux.

- On a, par exemple,
$$f(0) = 0$$
- Par croissances comparées, on a,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut calculer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
  - En particulier, on peut remarquer que la dérivée s'annule exactement en 1 et -1. Donc la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale.
  - On peut aussi utiliser l'expression de la dérivée pour en déduire le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

  - À partir du tableau de variations, on déduit que f admet un minimum global en -1 qui vaut $-\exp(-1/2)$ et un maximum global en 1 qui vaut $\exp(-1/2)$.
- La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
Donc f'' est positive sur $]-\infty, \sqrt{3}]$ et $[\sqrt{3}, +\infty[$ et négative sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Donc la fonction f est convexe sur $]-\infty, \sqrt{3}]$ et $[\sqrt{3}, +\infty[$ et concave sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Elle admet deux *points d'inflexions* en $-\sqrt{3}$ et en $\sqrt{3}$.

À partir de ces informations, on peut tracer le graphe suivant.



Exemple 2.3 — Autour de la convexité de la fonction exponentielle. Soit f la fonction donnée par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\exp(x) + \exp(y)}{2}$$
3. Donner l'équation de la tangente en 0 de la courbe de la fonction f.
4. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geqslant x+1$$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \exp(x) \quad \text{et}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = \exp(x) \geqslant 0.$$
Donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Comme la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, on sait que
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in [0,1],\ \ f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y),$$
c'est-à-dire
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ \forall t \in [0,1],\ \ \exp\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant t \exp(x) + (1-t)\exp(y).$$
En prenant $t = \frac{1}{2}$, on obtient alors que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\exp(x) + \exp(y)}{2}$$
3. L'équation de la tangente en 0 de la courbe de la fonction f est donnée par
$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = x+1$$
4. Comme la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au dessus de sa tangente en 0 donc,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geqslant x+1$$

Exemple 2.4 — Autour de la concavité de la fonction logarithme. Soit g la fonction donnée par

$$g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
3. En déduire que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \qquad \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$
4. Donner l'équation de la tangente en 1 de la courbe du logarithme.
5. En déduire que
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad \ln(x) \leqslant x-1$$

1. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0.$$
Donc la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$.
2. Comme la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$, on sait que
$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in [0,1], \ \ f\big(tx+(1-t)y\big) \geqslant t f(x) + (1-t) f(y),$$
c'est-à-dire
$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in [0,1], \ \ \ln\big(tx+(1-t)y\big) \geqslant t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
En prenant $t = \frac{1}{2}$, on obtient alors que
$$\forall x,y \in]0,+\infty[, \qquad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
3. Soient $x, y \in]0,+\infty[$. On a montré que
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
En passant à l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient
$$\exp\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \exp\left(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}\right)$$
c'est-à-dire
$$\frac{x+y}{2} \geqslant \exp\left(\ln(\sqrt{xy})\right),$$
c'est-à-dire
$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$
4. L'équation de la tangente en 1 de la courbe de la fonction g est donnée par
$$y = g'(0)(x-1) + g(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = x-1$$
5. Comme la fonction g est concave sur $]0,+\infty[$, la courbe représentative de la fonction g est en-dessous de toutes ses tangentes, en particulier en-dessous de sa tangente en 1 donc,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln(x) \leqslant x-1$$