TD 29 – Convexité

Exercice 1 – Soit $h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad h(x) = \mathrm{e}^x - 2\ln(x+1)$$

1. Montrer que h est convexe sur $]-1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geqslant 1 - x$.

Exercice 2 – On considère la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0, \qquad g(t) = t^2 - t\ln(t)$$

Étudier la convexité de g. On précisera les éventuels points d'inflexion.

Exercice 3 – Ecricome 2006 S. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$$

Exercice 4 – Maths II (CCIP). Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction concave sur $]0,1[$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \geqslant 1, \qquad g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 5 – EML S 2007. On considère l'application

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. On considère l'application

$$A : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

   (b) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser $f'(0)$. *On admettra que*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

   (c) Dresser le tableau de variations de A.
   (d) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application

$$B : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2} + 2\ln(1+x)$$

   (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

   (b) Dresser le tableau de variations de B.
   (c) En déduire que f est convexe sur $]0,+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.