

TD 26 – INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exercice 1 – Reconnaissance de primitives/formes. Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer.

$$I_1 = \int_4^5 \frac{1}{3-t} dt \quad I_2 = \int_1^2 (3x-1)^2 dx \quad I_3 = \int_1^2 \frac{1}{u} du$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \quad I_5 = \int_0^4 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} dt$$

Exercice 2 – Fractions Rationnelles.

1. On considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$

En déduire une primitive de f sur $] -\infty, 1[$.

2. Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{4x^2-4x+1}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ *On pourra factoriser le dénominateur de la fraction rationnelle.*

Exercice 3 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes.

$$1. \int_0^1 t \exp(-2t) dt \quad 2. \int_0^1 (1-t)e^{4t} dt$$

Exercice 4 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

$$1. f : x \mapsto (2x+1)\exp(3x) \quad 2. g : x \mapsto x^2 \ln(x)$$

Exercice 5 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, l'intégrale suivante,

$$1. \int_0^1 (t^2+1)e^t dt \quad 2. \int_1^2 (\ln(x))^2 dx$$

Exercice 6 – Changement de variables. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes.

$$1. \int_1^e \frac{(\ln(x))^n}{x} dx \text{ en posant } y = \ln(x) \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}} \text{ en posant } t = e^x$$

$$3. \int_1^x \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^4 dt \text{ (} x > 0 \text{) en posant } u = 1 + \frac{1}{t} \quad 4. \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}} dt \text{ en posant } u = \ln(t)$$

$$5. \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+e^t} dt \text{ en posant } x = e^{-t} \quad 6. \int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx \text{ en posant } t = x^2$$

Exercice 7 – Théorème fondamental. Dans chaque cas, justifier que la fonction est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer sa dérivée.

$$1. F_1 : x \mapsto \int_1^x \sqrt{t^2 + 1} dt$$

$$2. F_2 : x \mapsto \int_0^{2x} \exp(t^3) dt$$

$$3. F_3 : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \ln(t^2 + 2) dt$$

Exercice 8 – On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. Calculer I_0 .
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_{n+1} en fonction de I_n .
3. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
4. En utilisant la question 2, montrer que $nI_n \leq e$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 9 – Soit f_0 la fonction définie sur $[0, 1]$ par, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_0(x) = e^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (1-x)^n e^{-3x}$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1. Calculer I_0 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : I_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
3. En déduire la valeur de I_1 et I_2 .
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
5. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 – On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1. Calculer I_0 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

3. Calculer alors I_1 et I_2 .

Exercice 11 – Ericome Maths S 2016. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} x^a (1-x)^b$$

1. Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$

3. En déduire que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

4. En déduire que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad \int_0^1 f_{a,b}(x) dx = 1$$