TD 29 – Convexité

Exercice 1 – Soit $h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad h(x) = e^x - 2\ln(x+1)$$

1. Montrer que h est convexe sur $]-1,+\infty[$.

   - La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$.
   - La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ (car pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $x+1>0$) donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$.

   Donc, par opérations, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et

   $$\forall x > -1, \qquad h'(x) = e^x - \frac{2}{x+1}$$

   puis,

   $$\forall x > -1, \qquad h''(x) = e^x + \frac{2}{(x+1)^2}$$

   Donc, on remarque que

   $$\forall x > -1, \qquad h''(x) \geqslant 0.$$

   Donc la fonction h est convexe sur $]-1,+\infty[$

2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geqslant 1 - x$.

   Comme la fonction h est convexe sur $]-1,+\infty[$, sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier, au dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est donnée par

   $$y = h'(0)(x-0) + h(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = -x+1$$

   Donc, on en déduit que

   $$\forall x > -1, \qquad h(x) \geqslant -x+1$$

Exercice 2 – On considère la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0, \qquad g(t) = t^2 - t\ln(t)$$

Étudier la convexité de g. On précisera les éventuels points d'inflexion.

- Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Donc, par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall t > 0, \qquad g'(t) = 2t - (\ln(t) + t \times \frac{1}{t}) = 2t - 1 - \ln(t)$$

puis,

$$\forall t > 0, \qquad g''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}$$

On peut aller dresser le tableau de signe de g'' pour étudier la convexité de g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$	||	$-$	0	$+$	

On en déduit que

- la fonction g est concave sur $]0,\frac{1}{2}]$,
- la fonction g est convexe sur $[\frac{1}{2},+\infty[$,
- la fonction g admet un point d'inflexion en $\frac{1}{2}$.

Exercice 3 – Ecricome 2006 S. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{-x} \geqslant 1-x$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-x}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -e^{-x}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = e^{-x} \geqslant 0$$

Donc la fonction f est concave sur $\mathbb{R}$. Donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier, au dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est donnée par

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad y = -x+1$$

Donc, on en déduit que

$$\forall x > -1, \qquad f(x) \geqslant -x+1$$

c'est-à-dire

$$\forall x > -1, \qquad e^{-x} \geqslant 1-x.$$

Exercice 4 – Adapté de Maths II 2015. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction concave sur $[0,1]$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \geqslant 1, \qquad g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

La fonction g est concave sur $[0,1]$. Donc,

$$\forall u,v \in [0,1],\ \ \forall x \in [0,1],\ \ g\big(xu+(1-x)v\big) \geqslant xg(u)+(1-x)g(v).$$

Soient $x \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$. Prenons

$$u = 1-\frac{1}{n} \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad v = \frac{1}{n} \in [0,1]$$

donc l'inégalité précédente. On obtient alors directement que

$$g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 5 – EML S 2007. On considère l'application

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $[0,+\infty[$.

- **Étude de la continuité de f sur $]0,+\infty[$.** La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]-1,+\infty[$ donc à fortiori sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ donc, en particulier sur $]0,+\infty[$. Donc, par produit la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
- **Étude de la continuité de f en 0.** Il reste à étudier la continuité en 0. D'une part,

  $$f(0) = 1$$

  D'autre part,

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

  en utilisant le fait que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 donc que son taux d'accroissement en 0 tend vers la valeur de sa dérivée en 0. Finalement, on a montré que

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

  Donc f est également continue en 0.

2. On considère l'application

$$A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

En raisonnant comme à la question 1, on obtient, par opérations que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2}$$

(b) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$. *On admettra que*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Comme on a déjà montré à la question 2(a) que f était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, il s'agit juste ici d'étudier la dérivabilité en 0. On a

$$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

On en déduit donc que,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie (qui vaut $-1/2$), donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

(c) Dresser le tableau de variations de A.

La fonction A est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ (en particulier car pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x + 1 \neq 0$ et $1 + x > 0$). De plus, sa dérivée est donnée par

$$\forall x \geqslant 0, \qquad A'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

Donc, on peut en déduire le tableau de signe de A' puis le tableau de variations de A de la manière suivante.

x	0		$+\infty$
$A'(x)$	0	$-$	
A	0	$\searrow$	$-\infty$

Dans le tableau de variations de A, on a rajouté la valeur $A(0) = 0$ et la limite

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - \ln(1+x) = 0 - \infty = -\infty$$

(d) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Comme $A(0) = 0$ et que A est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (cf question 2(c)), on en déduit que

$$\forall x > 0, \qquad A(x) < 0.$$

On en déduit, grâce à la question 2(a), que

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Remarquons d'abord que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Or, par composition et produit de limites, on obtient directement que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

De plus, par croissances comparées, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Donc, finalement, par somme, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

3. On considère l'application

$$B : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2} + 2\ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$$

En raisonnant comme à la question 1, on montre que la fonction f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Et on a déjà calculer à la question 2(a) que

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

Donc, en dérivant cette égalité (la fonction A étant aussi dérivable sur $]0,+\infty[$), on obtient que,

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{x^2A'(x) - 2xA(x)}{x^4}$$

Or, en utilisant le calcul de A' effectué à la question 2(c), on obtient

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \qquad x^2A'(x) - 2xA(x) &= -\frac{x^3}{(1+x)^2} - 2x\left(\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)\right)\\ &= \frac{-x^3 - 2x^2(1+x)}{(1+x)^2} + 2x\ln(1+x)\\ &= \frac{-3x^3 - 2x^2}{(1+x)^2} + 2x\ln(1+x)\\ &= xB(x)\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{xB(x)}{x^4} = \frac{B(x)}{x^3}$$

(b) Dresser le tableau de variations de B.

La fonction B est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$. De plus, après des calculs non détaillées, sa dérivée est donnée par

$$\forall x \geqslant 0, \qquad B'(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3}$$

Donc, on peut en déduire le tableau de signe de B' puis le tableau de variations de B de la manière suivante.

x	0		$+\infty$
$B'(x)$	0	$+$	
B	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Comme $B(0) = 0$ et que B est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (cf question 3(b)), on en déduit que

$$\forall x > 0, \qquad B(x) > 0.$$

On en déduit, grâce à la question 3(a), que

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} > 0.$$

Donc f est convexe sur $]0, +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

On doit faire apparaître sur le graphe de cette fonction :

- que cette fonction est convexe,
- qu'elle vaut 1 en 0,
- qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.